

Optica II. Tema 2

Interferencia por DFO e Coherencia Optica

Grao en Física

Suso Liñares Beiras

Area de Optica. Departamento de Física Aplicada.
Universidade de Santiago de Compostela

Neste tema desenvólvese o concepto de interferencia óptica clásica, tanto na súa versión vectorial como escalar, xunto co análise das súas implicacións tanto teóricas como aplicadas. Iniciarase co estudo de **pulsos de luz**, é dicir, de ondas cunha envolvente temporal, o que facilitará o estudo de conceptos fundamentais coma o de coherencia e interferencia ópticas.

De seguido, presentarase unha introdución á coherencia óptica clásica e a teoría xeral da interferencia. Neste tema estúdanse pormenorizada-mente os fenómenos de **interferencia por división da fronte de onda**, en particular o interferómetro de Young, co obxecto de adquirir destrezas para a súa descrición formal, o seu cálculo e a súa análise e aplicacións, de xeito totalmente ondulatorio. Estúdase tamén o concepto de visibilidade interferencial e as súas implicacións na determinación da coherencia (ou correlación) óptica.

Finalmente, abordarase con certo detalle o concepto de **coherencia óptica espacial e temporal**, o xeito de achar o grao de coherencia, e as súas consecuencias teóricas e prácticas xunto coas súas aplicacións a campos coma, p.ex., a espectroscopía óptica e a astronomía óptica, onde ademais se introducirá o importante teorema de Van Cittert-Zernike que relaciona á coherencia óptica coa imaxe en intensidade dun obxecto astronómico luminoso.



Esta obra licenciose coa Licenza CC-BY-NC-ND Creative Commons Atribución-Non comercial-Non derivadas 4.0 Internacional. Título: *Fundamentos da Interferencia e da Coherencia Optica*. Autor: *Jesús Liñares Beiras*, Universidade de Santiago de Compostela. Para ver unha copia desta licenza, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>.

Índice Xeral

1. Interferencia e Coherencia: introducción	2
1.1. CONCEPTO DE INTERFERENCIA E COHERENCIA	2
1.2. PULSOS DE LUZ: EXPRESIÓN ANALÍTICA E ESPECTRO [C]	2
1.3. PROPAGACIÓN DE PULSOS DE LUZ	3
1.3.1. PROPAGACIÓN DE PULSOS PLANOS SEN DISPERSIÓN	3
1.3.2. PROPAGACIÓN DE PULSOS LP SEN DISPERSIÓN	6
1.3.3. TEORÍA XERAL DA PROPAGACIÓN DE PULSOS [C]	7
1.4. INTRODUCCIÓN Á COHERENCIA OPTICA	8
1.4.1. CONCEPTO FORMAL DA COHERENCIA ÓPTICA	8
1.4.2. INTERPRETACIÓN ESTATÍSTICA [C].	9
1.4.3. COHERENCIA TEMPORAL E ESPACIAL E FONTES DE LUZ	10
1.4.4. ESTATÍSTICA EQUIPROBABLE	11
1.5. TEORÍA XERAL DA INTERFERENCIA	13
1.5.1. VECTOR DE POYNTING INTERFERENCIAL [C]	13
1.5.2. FORMA XERAL E NORMAL DA INTERFERENCIA.	13
1.5.3. INTERFERENCIA DE ONDAS LP E c-m	14
1.5.4. MÉTODOS DE OBTENCIÓN DE INTERFERENCIA	17
1.5.5. DIVISIÓN DE POLARIZACIÓN DA ONDA (DPO)	17
2. Interferencia por División da Fronte de Onda	18
2.1. INTERFERÓMETRO DE YOUNG (IY)	18
2.1.1. ESTUDO INTERFERENCIAL CASE-ONDULATORIO	18
2.1.2. ESTUDO INTERFERENCIAL ONDULATORIO.	19
2.1.3. ANÁLISE DO PADRÓN INTERFERENCIAL	20
2.1.4. EXTENSIÓN Á INTERFERENCIA CUÁNTICA [C]	23
2.2. INTERFERENCIA YOUNG E COHERENCIA TEMPORAL.	24
2.3. OUTROS INTERFERÓMETROS TIPO YOUNG	25
2.4. INTERFERENCIA E POLARIZACIÓN	28
2.5. EFECTO DA TRASLACIÓN DA FONTE PRINCIPAL	31
2.5.1. ESTUDO INTERFERENCIAL CASE-ONDULATORIO [C]	31
2.5.2. ESTUDO INTERFERENCIAL ONDULATORIO	31
2.5.3. IY CON ILUMINACIÓN PLANA	32
3. Funcións de Coherencia Espacial e Temporal	34
3.1. INTERFERENCIA CON FONTES INCOHERENTES	34
3.2. INTRODUCCIÓN Á INTERFEROMETRÍA ESTELAR	35
3.3. FONTE EXTENSA E FUNCIÓN DE COHERENCIA [C]	36
3.4. INTERFERENCIA CON FONTE LINEAL (1D) INCOHERENTE	37
3.4.1. DERIVACIÓN DA INTENSIDADE INTERFERENCIAL	37
3.4.2. ANCHURA DE COHERENCIA ESPACIAL	38
3.5. INTRODUCCIÓN AO TEOREMA DE VAN CITTERT-ZERNIKE (VC-Z)	38
3.6. FUNCIÓN DE COHERENCIA (s) E TEOREMAS DE VC-Z 1D E 2D [C]	39
3.7. COHERENCIA TEMPORAL NO ESPAZO ESPECTRAL [C]	41
3.7.1. INTERFERENCIA POLICROMÁTICA CO IY	41
3.7.2. ESPECTROMETRÍA DE TFC CO IY	41
3.7.3. GRAO DE COHERENCIA TEMPORAL DO IY	42
3.8. FUNCIÓN DE COHERENCIA (t) E TEOREMA DE V-K [C]	43

1. Interferencia e Coherencia: introducción

1.1. CONCEPTO DE INTERFERENCIA E COHERENCIA

A interferencia é a variación espazo-temporal (e-t) da densidade de fluxo de enerxía luminosa, é dicir, da intensidade luminosa (irradiancia) debida á **superposición** de campos luminosos,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)$$

-Físicamente, a interferencia dá lugar a unha **redistribución** no espazo (e no tempo) da intensidade luminosa dos campos ópticos que se superpoñen, logo $I \neq I_1 + I_2$. Diremos que hai **interferencia** só se a redistribución espacial da intensidade permanece **estacionaria en promedio temporal**.

-A interferencia permite a **caracterización** das ondas luminosas: medida de *l.d.o.* λ (ou ω), de formas espaciais das fronte de onda, de espectros ópticos $F(\omega)$, etc., e por outra permite abordar **aspectos fundamentais** (TER, espectros cuánticos, LIGO-TXR, ...) e aplicados como a medida de parámetros físicos de obxectos cos que interacciona a luz: espesores, índices de refracción, distancias, velocidades, etc. (**metroloxía óptica**).

-Finalmente, a **coherencia óptica**, i.e., a **correlación** entre valores do campo en distintos puntos e-t (pureza e-t) cando hai fluctuacións, mídese con **técnicas interferenciais**.

1.2. PULSOS DE LUZ: EXPRESIÓN ANALÍTICA E ESPECTRO [C]

■ **Expresión (sinal) analítica.** Imos xeralizar o caso dunha onda harmónica a unha onda policromática, p.ex. onda plana propagándose en z (pulso z -plano). **Na práctica**, o usual é ter ben definida a chamada frecuencia central ω_c , daquela, temos a seguinte expresión real do campo óptico, p.ex. en $z=0$,

$$E_R(t) = E_o(t) \cos(\omega_c t - \epsilon(t)) = \frac{1}{2} [E_o(t) e^{i\epsilon(t)} e^{-i\omega_c t} + E_o(t) e^{-i\epsilon(t)} e^{i\omega_c t}] = \frac{1}{2} [E(t) + E^*(t)] \quad (1)$$

A función $E(t) = E_o(t) e^{i\epsilon(t)} e^{-i\omega_c t} = E(t) e^{-i\omega_c t}$ é unha **sinal analítica** xa que baixo condicións de regularidade de $E_R(t)$, pódese probar que $E(t)$ é unha función analítica **complexa**. Asemade, $E(t)$ é a **envolvente**, e $e^{-i\omega_c t}$ a **portadora** da sinal. En xeral describe luz policromática pero case-harmónica nun dominio t_o relevante da envolvente (chamada pulso óptico).

■ **Espectro analítico.** Podemos expresar unha función complexa na **base funcional complexa** $e^{-i\omega t}$. Daquela dada unha sinal analítica podemos expresala como

$$E(t) = E(t) e^{-i\omega_c t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2)$$

onde supuxemos, en boa aproximación, que $\omega_c \gg 0$, e daquela estendeuse o dominio de integración. Tecnicamente, é unha Transformada de Fourier (**TF**) complexa inversa.

$E(\omega)$ é o **espectro analítico**: a **proxección** da sinal analítica $E(t)$ sobre os elementos conxugados da base funcional $e^{i\omega t}$ (**Obs.**-proxección complexa: $c_\omega = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_\omega^*$), ou TF directa, é dicir,

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^\infty E(t) e^{i\omega t} dt = \{\omega_d = \omega - \omega_c\} = \int_{-\infty}^\infty E(t) e^{i\omega_d t} dt \quad (3)$$

Obs.-Para pulsos (onda policromáticas) non planos, estas expresións aplícanse ao factor de amplitude $A(t)$ (envolvente) e ao que lle corresponderá un espectro $A(\omega)$.

Exer.- 1 [C] Achar a expresión analítica dun pulso z -plano xerado pola superposición de dúas ondas de igual amplitude complexa $E_0 e^{i\epsilon}$ e frecuencias ω_1 e ω_2 nun medio dispersivo, é dicir, $n(\omega)$, e de seguido achar o espectro coma unha TF directa.

Sol.- O campo total é $E(z, t) = E_0 e^{i\epsilon} \{ e^{i(k_1 z - \omega_1 t)} + e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} \}$, con $k_i = (\omega_i/c)n(\omega_i)$, $i=1, 2$, que se pode reescribir como

$$E(z, t) = E_0 e^{i\epsilon} \left\{ e^{i\left[\frac{(k_1-k_2)}{2}z - \frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t\right]} + e^{-i\left[\frac{(k_1-k_2)}{2}z - \frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t\right]} \right\} e^{i\left[\frac{(k_1+k_2)}{2}z - \frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t\right]} =$$

$$= 2E_0 e^{i\epsilon} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\left(t - \frac{\Delta k}{\Delta\omega}z\right)\right) e^{i(k_c z - \omega_c t)}, \quad \Delta k = (k_1 - k_2), \Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)$$

obsérvase a envolvente cosenoidal con variable $(t - \frac{\Delta k}{\Delta\omega}z)$. Nótese que $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ ten unidades de **velocidade (chamada de grupo)**. Ademais a portadora ten valores centrais $k_c = \frac{k_1+k_2}{2}$ e $\omega_c = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. A sinal analítica, p.ex. en $z=0$, é $E(0, t) = 2E_0 e^{i\epsilon} \cos(\frac{\Delta\omega}{2}t) e^{-i\omega_c t}$. Da Ec. (3) obtemos

$$E(\omega) = E_0 e^{i\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\frac{\Delta\omega}{2}t} + e^{-i\frac{\Delta\omega}{2}t}] e^{i\omega_d t} dt$$

Da definición integral da **delta de Dirac** $\int e^{\pm i(\omega-\omega')t} dt = \int e^{\pm i2\pi(\nu-\nu')t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega')$, temos o espectro analítico: $E(\omega) = E_0 e^{i\epsilon} [2\pi\delta(\omega_d + \frac{\Delta\omega}{2}) + 2\pi\delta(\omega_d - \frac{\Delta\omega}{2})]$, é dicir, frecuencias $\omega = \omega_c + \frac{\Delta\omega}{2} = \omega_1$ e $\omega = \omega_c - \frac{\Delta\omega}{2} = \omega_2$, e igual amplitude espectral ($E_0 e^{i\epsilon} 2\pi$). Obsérvase que se facemos a TF inversa obtemos a sinal analítica.

1.3. PROPAGACIÓN DE PULSOS DE LUZ

1.3.1. PROPAGACIÓN DE PULSOS PLANOS SEN DISPERSIÓN

■ **Pulso óptico e espectro.** Sexa un pulso nun punto r , i.e., $E(t) = E(t) e^{-i\omega_c t} = E_0(t) e^{i\epsilon(t)} e^{-i\omega_c t}$ (**sinal analítica**) con ω_c unha frecuencia central. O **espectro (analítico)** do campo obtense coa proxección sobre elementos dunha base funcional (**Transformada de Fourier directa**),

$$E(t) e^{-i\omega_c t} = \frac{1}{2\pi} \int E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \Rightarrow E(\omega) = \int E(t) e^{i(\omega-\omega_c)t} dt \equiv E(\omega - \omega_c) \equiv E(\omega_d) \quad (4)$$

Nótese que a última integral pódese/débese interpretar como a proxección do campo $E(t) e^{-i\omega_c t}$ sobre a base de harmónicos conxugados $e^{i\omega t}$.

■ **Propagación dun pulso.** Sexa un pulso z -plano nun medio de índice n , i.e., unha **combinación lineal** de ondas z -planas harmónicas

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int E(\omega) e^{-i\omega t} e^{ik_0 n z} d\omega \quad (5)$$

Agora imos supoñer que o índice $n(\omega)$ é pouco dispersivo e que o pulso ten un **harmónico central** de frecuencia ω_c (en xeral, o que máis contribúe ao pulso). Daquela podemos facer un desenvolvemento de Taylor de $k = k_0 n$, con $k_c = k(\omega_c)$ e $k'_c = \partial k(\omega) / \partial \omega(\omega_c)$ (tamén se pode facer Taylor se $\forall \omega$ do pulso $|\omega - \omega_c| \ll$),

$$E(z, t) \approx \frac{1}{2\pi} \int E(\omega) e^{-i\omega t} e^{ik_c z} e^{ik'_c z(\omega - \omega_c)} d\omega = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int E(\omega) e^{-i\omega t} e^{ik'_c z(\omega - \omega_c)} e^{i\omega_c t} d\omega \right\} e^{ik_c z} e^{-i\omega_c t} =$$

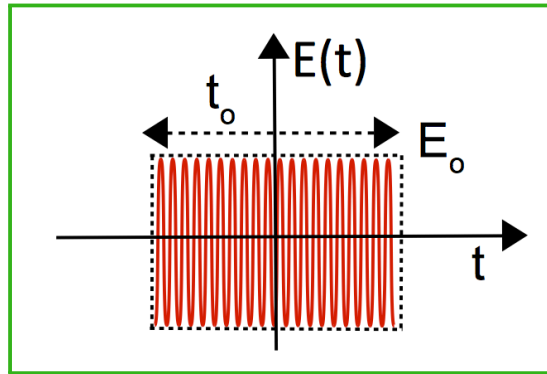
$$= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int E(\omega) e^{-i(\omega - \omega_c)(t - k'_c z)} d\omega \right\} e^{i(k_c z - \omega_c t)} = \{\text{ver Ec. 4}\} = E(t - k'_c z) e^{i(k_c z - \omega_c t)} \quad (6)$$

$E(t - k'_c z)$ é a **envolvente** do pulso. A mesma en $t=0$, pero desprazada $t_g = k'_c z = z/v_g$, con v_g a **velocidade de grupo**. Nótese que a velocidade de fase é $v_f = \omega/k_c$.



■ **Espectro dun Pulso rectangular de luz.** Unha **fonte real de luz** é unha sucesión de pulsos. Un primeiro tipo de pulsos son os rectangulares. É de interese achar o espectro analítico destes pulsos rectangulares de duración t_o e amplitude E_o con frecuencia central ω_c , i.e., en notación real $E_R(t) = E_o \cos(\omega_c t - \epsilon)$, $t \in [0, t_o]$. Daquela a **senal analítica (notación complexa)** é

$$E(t) = E_o e^{i\epsilon} e^{-i\omega_c t}, \quad t \in [0, t_o] \quad (7)$$



Obsérvase que a envolvente do pulso é $E(t) = e^{i\epsilon} E_o$, $t \in [0, t_o]$ (ver Figura). O **espectro analítico $E(\omega)$** obtense cunha TF directa, ver Ec. (4),

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i(\omega - \omega_c)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega_d t} dt = e^{i\epsilon} \int_0^{t_o} E_o e^{i\omega_d t} dt, \quad (\omega_d = \omega - \omega_c) \quad (8)$$

Achando esta integral, que é inmediata, obtemos o espectro analítico do pulso de luz, é dicir,

$$E(\omega) = \frac{e^{i\epsilon} E_o}{i\omega_d} e^{i\omega_d t} \Big|_0^{t_o} = \frac{e^{i\epsilon} E_o}{i\omega_d} (e^{i\omega_d t_o} - 1) \quad (9)$$

A partires do espectro analítico podemos achar a chamada **intensidade espectral (reducida)**, é dicir,

$$I(\omega) = |E(\omega)|^2 = E^*(\omega) E(\omega) = \left(\frac{E_o}{-i\omega_d} \right) (e^{-i\omega_d t_o} - 1) \left(\frac{E_o}{i\omega_d} \right) (e^{i\omega_d t_o} - 1) \quad (10)$$

Para facer este cálculo é útil usar, p.ex., a seguinte expresión para o módulo cuadrado da suma de números (ou funcións) complexas,

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1^* + z_2^*)(z_1 + z_2) = |r_1 e^{i\epsilon_1} + r_2 e^{i\epsilon_2}|^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos(\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

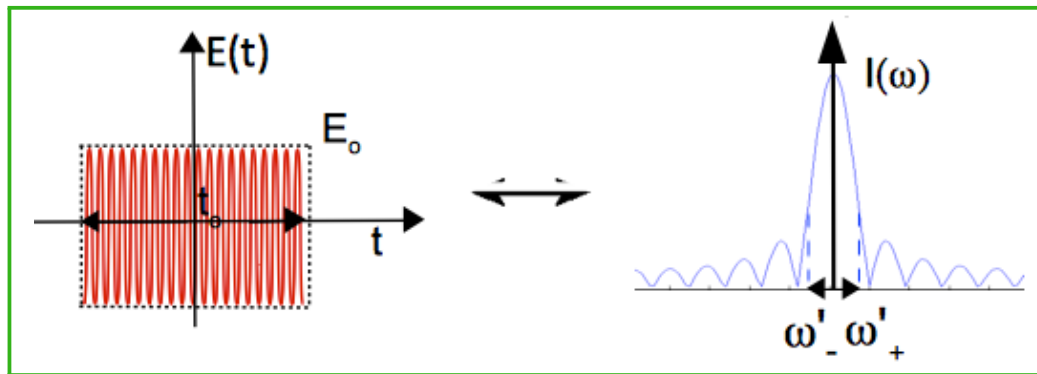
Aplicando esta ecuación á función $(E_o/i\omega_d) (e^{i\omega_d t_o} - 1) = (E_o/i\omega_d) (e^{i\omega_d t_o} + e^{i\pi})$, é dicir, á Ec. (10), obtemos

$$I(\omega) = \frac{E_o^2}{\omega_d^2} (1 + 1 + 2 \cos(\omega_d t_o - \pi)) = E_o^2 t_o^2 \frac{\text{sen}^2(\omega_d t_o / 2)}{(\omega_d t_o / 2)^2} = E_o^2 t_o^2 \text{senc}^2\left(\frac{\omega_d t_o}{2}\right) \quad (11)$$

onde se fixo uso do coseno do ángulo dobre, i.e., $\cos a = \cos^2(a/2) - \text{sen}^2(a/2)$, agrupouse axeitadamente, e usouse a chamada **función seno-cociente**: $\text{senc } x = \frac{\text{sen } x}{x}$.

■ **Análise espectral.** A función achada $I(\omega) = E_o^2 t_o^2 \text{senc}^2(\omega_d t_o/2)$ está centrada en $\omega = \omega_c$ cun **valor máximo** $I(0) = E_o^2 t_o^2$. Asemade, é unha función oscilante que decae como $1/\omega_d^2$. Nótese que a meirande parte das frecuencias relevantes están entre os **dous primeiros ceros** simétricos da función, $\omega_d t_o/2 = \pm\pi$, logo: $\omega_{\pm} = \omega_c \pm 2\pi/t_o$. Porén imos definir unha **anchura espectral** (intervalo) **significativa** de frecuencias como

$$\omega_d t_o/2 = \pm\pi/2 \Rightarrow \begin{cases} \omega'_+ = \omega_c + \pi/t_o \\ \omega'_- = \omega_c - \pi/t_o \end{cases} \quad (12)$$



Logo $\Delta\omega = (\omega'_+ - \omega'_-) = 2\pi/t_o$, (ver Figura), e obtemos unha anchura de frecuencias onde $I(\omega)$ é maior que o 40% do máximo. En efecto, en $\omega = \omega'_{\pm}$ obtemos o seguinte valor: $\text{senc}^2(\omega_d t_o/2) = \text{senc}^2((\omega'_{\pm} - \omega_c)t_o/2) = \text{senc}^2(\pi/2) = (2/\pi)^2 \approx 0.405$.

-Isto é un criterio significativo, logo é unha anchura significativa do espectro chamada **anchura espectral**, e proporciona a importante **relación significativa**

$$\boxed{\Delta\omega t_o \approx 2\pi \rightarrow \Delta\nu t_o \approx 1} \quad (13)$$

-Daquela, hai unha relación inversa entre anchura espectral (significativa) e duración (tamén significativa) do pulso t_o , chamado **tempo de coherencia**. Se $t_o \gg$ (p.ex. 1ms) a luz, a efectos prácticos, é case-monocromática (c-m), i.e., $\Delta\omega \ll$.

-**Conceptos derivados**-Desta relación obtéñense varios conceptos derivados de alto interese óptico coma p.ex., a **lonxitude de coherencia** $l_o = t_o c = 2\pi c / \Delta\omega = c / \Delta\nu$; a **estabilidade espectral** $\Delta\omega / \omega_c$ ou $\Delta\nu / \nu_c$, a **anchura cromática** do pulso $\Delta\lambda \approx \lambda_c^2 / ct_o = \lambda_c^2 / l_o$ (x.q. $2\pi/\lambda = \omega/c$ entón $\Delta\lambda \approx \lambda_c^2 \Delta\omega / 2\pi c = \lambda_c^2 / ct_o$); etc.

Exer.- 2 Sexa unha lámpada espectral (coma p.ex. de sodio) cuxa anchura espectral significativa é $\Delta\nu \approx 5 \cdot 10^{10} \text{s}^{-1}$ ($\approx 50 \text{GHz}$) e $\lambda_c \approx 589 \text{nm}$. Achar o tempo de coherencia, a lonxitude de coherencia e a anchura cromática. Fágase o mesmo para unha fonte láser p.ex. con $\Delta\nu \approx 10^6 \text{s}^{-1}$ ($\approx 1 \text{MHz}$) e $\lambda_c \approx 633 \text{nm}$.

Sol.-Para a fonte espectral obtense $t_o = 1/\Delta\nu = 1/(5 \cdot 10^{10} \text{s}^{-1}) = 20 \cdot 10^{-12} = 20 \text{ps}$, logo unha lonxitude $l_o = ct_o \approx 60 \cdot 10^{-4} \text{m} = 6 \text{mm}$. Finalmente a anchura cromática será $\Delta\lambda \approx \lambda_c^2 / l_o \approx 0.5 \text{nm}$ (é importante indicar que o dobrete de sodio está separado aproximadamente 0.6nm , é dicir, $\lambda_1 = 589 \text{nm}$ e $\lambda_2 = 589.6 \text{nm}$).

-Idem procedemento para o caso do láser que dará valores moito máis espectaculares, p.ex., $t_o = 1/\Delta\nu = 1 \mu\text{s} \gg 20 \text{ps}$.

1.3.2. PROPAGACIÓN DE PULSOS LP SEN DISPERSIÓN

Sexa un **pulso óptico LP**: $E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) e^{ik_o \mathcal{L}} e^{-i\omega_c t} = A(t) F(\mathbf{r}) e^{ik_o \mathcal{L}} e^{-i\omega_c t}$ nun medio homoxéneo de índice $n(\omega)$, é dicir, $\mathcal{L} = ns$, onde $s = z, r, \rho, \dots$, logo $F(\mathbf{r}) = 1, r^{-1}, \rho^{-1/2}, \dots$, é dicir, pulsos planos, esféricos, cilíndricos, Supoñendo dispersión case nula, é dicir, $k(\omega) = k_o n(\omega) \approx k_c + k'_c(\omega - \omega_c) + \dots$, temos un **resultado análogo ao caso plano**:

$$E(\mathbf{r}, t) \approx \int A(\omega) F(\mathbf{r}) e^{ik_c s} e^{ik'_c s(\omega - \omega_c)} e^{-i\omega t} d\omega = \left(\int A(\omega) e^{-i(\omega - \omega_c)(t - k'_c s)} d\omega \right) F(\mathbf{r}) e^{ik_c s} e^{-i\omega_c t}$$

logo
$$E(\mathbf{r}, t) = A(t - k'_c s(\mathbf{r})) F(\mathbf{r}) e^{ik_c s(\mathbf{r})} e^{-i\omega_c t} \tag{14}$$

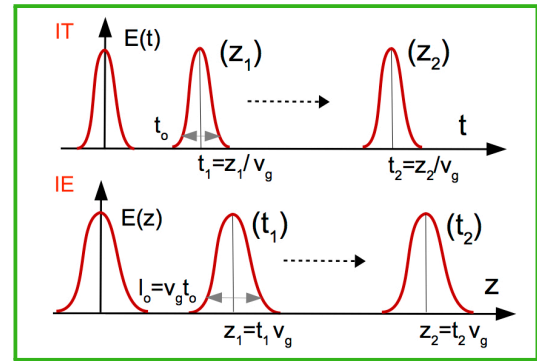
Coma no caso plano $k_c s(\mathbf{r}) = (\omega_c / v_f(\omega_c)) s(\mathbf{r})$, onde as velocidades de fase e de grupo son $v_f = (\omega/k)|_{\omega=\omega_c} \neq v_g = d\omega/dk|_{\omega=\omega_c}$.

-Visualización gráfica. Sexa un pulso z -plano, i.e., $s(\mathbf{r}) = z$ e $F=1$, logo

$$A(t - k'_c s(\mathbf{r})) = A(t - z/v_g) \equiv E(t - z/v_g)$$

que en calquera plano $z = z_1, z_2, \dots$ ten a mesma forma temporal que en $z=0$ pero **desprazada** (IT: imaxe temporal).

Idem con imaxe espacial (IE), i.e, $E(z - v_g t)$ (ver Figura, que mostra “instantáneas” en tempos $t=0, t_1, t_2, \dots$).



Exer.- 3 Sexa un **pulso Gaussiano plano** con polarización \mathbf{u} , propagándose en z nun medio de índice $n(\omega) = n_o + a\omega$. En $z=0$ temos $\mathbf{E}(0, t) = E_o e^{i\epsilon} e^{-t^2/t_o^2} e^{-i\omega_c t} \mathbf{u}$. Achar o pulso en $z \neq 0$. Fágase o mesmo para o caso esférico, e esférico paraxial.

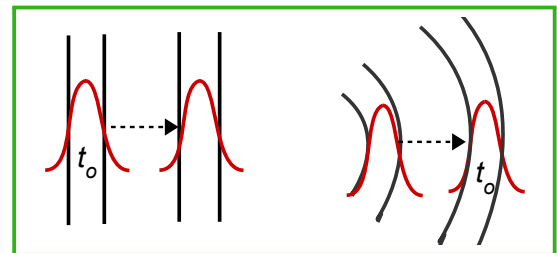
Sol.- $k_c = (\omega_c/c)(n_o + a\omega_c)$ e $k'_c = \partial(\omega n/c)/\partial\omega|_{\omega=\omega_c}$, logo $k'_c = (n_o/c) + (2a\omega_c/c)$. Entón obtemos

$$v_f = \frac{\omega_c}{k_c} = \frac{c}{n_o + a\omega_c}, \quad v_g = \frac{1}{k'_c} = \frac{c}{n_o + 2a\omega_c}$$

Observar que $v_f > v_g$. Daquela, tendo en conta que $A(t - k'_c s)$, os pulsos plano-Gaussiano e esférico-Gaussiano propagándose veñen dados por

$$\mathbf{E}(z, t) = (E_o e^{i\epsilon} e^{-\frac{(t - k'_c z)^2}{t_o^2}}) e^{i[k_c z - \omega_c t]} \mathbf{u}; \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (A_o e^{i\epsilon} e^{-\frac{(t - k'_c r)^2}{t_o^2}}) \frac{1}{r} e^{i[k_c r - \omega_c t]} \mathbf{u}$$

No límite paraxial farase a aproximación tamén na envolvente, é dicir, en $k'_c r$ e $k_c r$ usamos $r \approx z + (x^2 + y^2)/2z$ (en $F(r)$ usamos $r \approx z$). Na Figura representamos un pulso plano e un pulso esférico en dous instantes distintos.



-Orixe da incoherencia óptica. Unha fonte de luz real pódese describir coma unha **sucesión de pulsos**, moi parecidos ao anterior, e cada un deles cunha **fase inicial** $e^{i\gamma_a}$ ($\epsilon = \gamma_a$) e/ou **amplitude** E_{o_a} variando de xeito impredecible (**fluctuación estatística**). Isto dá lugar á chamada **incoherencia óptica** (en xeral **coherencia parcial**).



1.3.3. TEORÍA XERAL DA PROPAGACIÓN DE PULSOS [C]

■ **Dispersión cuadrática de pulsos.** Sexa unha onda LP en forma de pulso luminoso, é dicir, unha onda policromática de frecuencia central ω_c ben definida nun medio $n(\omega)$. Toda onda policromática pódese expresar como c.l. de ondas harmónicas,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega; \mathbf{r}) e^{-i\omega t} e^{ik_0 n(\omega) s(\mathbf{r})} d\omega \mathbf{u} \quad (15)$$

con $k_0 = \omega/c$. En xeral $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{A}(\omega) \mathbf{F}(\mathbf{r})$, $n(\omega) s(\mathbf{r}) = L(\mathbf{r}, \omega)$, onde $s(\mathbf{r}) = z, r, \rho, \dots$, e daquela temos $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 1, r^{-1}, \rho^{-1/2}, \dots$, é dicir, pulsos planos, esféricos, cilíndricos, Nótese que, en boa aproximación, se supón que $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ non experimenta dispersión, é dicir, non depende de ω .

-Supoñamos agora que o medio ten **feble dispersión**, ou que temos ondas con **espectros ópticos estreitos** ó redor de ω_c , entón

$$k = k_0 n(\omega) \approx k_c + k'_c (\omega - \omega_c) + \frac{k''_c}{2} (\omega - \omega_c)^2 + \dots \quad (16)$$

con $k_c = (\omega/c) n(\omega)|_{\omega=\omega_c} = (\omega_c/c) n(\omega_c)$, $k'_c = \partial k / \partial \omega|_{\omega=\omega_c}$, $k''_c = \partial^2 k / \partial \omega^2|_{\omega=\omega_c}$. Sostituíndo na ecuación (15), \times e \div por $e^{-i\omega_c t}$, obtemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega) e^{-i\{\omega t - \omega_c t - k'_c (\omega - \omega_c) s(\mathbf{r}) - \frac{k''_c}{2} (\omega - \omega_c)^2 s(\mathbf{r})\}} d\omega \right\} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) e^{i(k_c s(\mathbf{r}) - \omega_c t)} \mathbf{u} \quad (17)$$

O primeiro factor entre chaves describe o fenómeno chamado de dispersión do pulso óptico.

■ **Velocidade de grupo e dispersión de pulsos.** Se, p.ex., $k''_c \ll$ e usando $\omega_d = \omega - \omega_c$, o primeiro factor de Ec. (17) é xusto a primeira integral da Ec.(3) para o factor de amplitude $\mathbf{A}(\omega_d)$ e co cambio $\tilde{t} = t - k'_c s(\mathbf{r})$, é dicir, temos formalmente a seguinte expresión do campo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{A}(\omega_d) e^{-i\omega_d \tilde{t}} d\omega_d \right\} \mathbf{F}(\mathbf{r}) e^{i(k_c s(\mathbf{r}) - \omega_c t)} \mathbf{u} = \mathbf{A}(\tilde{t}) \mathbf{F}(\mathbf{r}) e^{i\varphi_c} \mathbf{u} \quad (18)$$

onde $\varphi_c = [k_c s(\mathbf{r}) - \omega_c t]$. Polo tanto obtivemos unha **TF inversa** que dá a mesma envolvente que en $t=0$ pero desprazada, é dicir, $\mathbf{A}(\tilde{t}) = \mathbf{A}(t - k'_c s(\mathbf{r}))$, logo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \tilde{t}) = \mathbf{A}(\tilde{t}) \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Daquela, o pulso alcanza a superficie $s(\mathbf{r})$ nun tempo $t = k'_c s(\mathbf{r})$, logo á **velocidade de grupo** $v_g = 1/k'_c$ (en xeral igual á v da enerxía), i.e., $s(\mathbf{r}) = v_g t$. Explicitamente,

$$v_g = \frac{1}{k'_c} = \left\{ \frac{\partial k}{\partial \omega} \right\}^{-1}_{|\omega=\omega_c} = \left\{ \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right\}^{-1}_{|\omega=\omega_c} = v_f \left\{ 1 + \frac{\omega}{n} \frac{\partial n}{\partial \omega} \right\}^{-1}_{|\omega=\omega_c} \quad (19)$$

-Se consideramos dispersión de orde dous, $k''(\omega_c) \neq 0$, habería ademais **ancheamento** do pulso (dispersión), **ou compresión (lente temporal)** (PN 2018); asemade, a orde tres, $k'''(\omega_c) \neq 0$ habería **asimetrización** do pulso, etc.



1.4. INTRODUCCIÓN Á COHERENCIA ÓPTICA

1.4.1. CONCEPTO FORMAL DA COHERENCIA ÓPTICA

-Os **campos** producidos por fontes reais presentan **flutuacións estatísticas** resultantes das emisións (pulsos) de duración finita (“harmónicas”) independentes (sen correlación no tempo t), e dos emisores puntuais independentes da fonte (no espazo e). Daquela, as ondas perden idealidade (**pureza e-t**), e en definitiva coherencia (correlación)

-Sexa un **campo puro** e-t, é dicir, que **non** presenta **flutuacións**, p.ex., o campo óptico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_o e^{i\epsilon_o} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{u}$, con $E_o = 1$. O campo en dous puntos e-t (\mathbf{r}_1, t) e $(\mathbf{r}_2, t + \tau)$ toma os valores $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t) = e^{i\epsilon_o} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}_1 - \omega t)} \mathbf{u} \equiv \mathbf{E}_{(1)}$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t + \tau) = e^{i\epsilon_o} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}_2 - \omega(t + \tau))} \mathbf{u} \equiv \mathbf{E}_{(2)}$, logo o **promedio** $\langle \mathbf{E}_{(1)}^* \mathbf{E}_{(2)} \rangle_t$ dá o valor $e^{i[\mathbf{k}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \omega\tau]}$ (correlación). Se houberse fluctuacións aleatorias da fase ϵ_o , amplitude E_o , frecuencia ω , etc, p.ex., ao redor dun valor, o resultado en promedio t sería diferente, en particular menor **en módulo** que 1 (ou E_o^2).

■ **Función de coherencia óptica.** A **coherencia óptica e-t** das perturbacións luminosas **formálizase** como unha **correlación** entre os valores da perturbación en dous puntos e-t, i.e., entre os campos ópticos $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1 = t) \equiv \mathbf{E}_{(1)}$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2 = t + \tau) \equiv \mathbf{E}_{(2)}$, ou $\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t' - \tau)$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t')$. Logo definimos a **función de coherencia (f.d.c.)** de primeira orde $g_{(1)}$ como

$$g_{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\langle \mathbf{E}_{(1)}^* \mathbf{E}_{(2)} \rangle_t}{\langle \mathbf{E}_{(1)} \mathbf{E}_{(1)}^* \rangle_t^{1/2} \langle \mathbf{E}_{(2)} \mathbf{E}_{(2)}^* \rangle_t^{1/2}} = \frac{(1/T') \int_0^{T'} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt}{\sqrt{(1/T') \int_0^{T'} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t) dt} \sqrt{(1/T') \int_0^{T'} \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t) dt}} \quad (20)$$

é dicir, cálculo de **promedios temporais**, onde en particular $\langle \mathbf{E}_{(i)} \mathbf{E}_{(i)}^* \rangle_t = I_i$ son as intensidades, que non cambian de t a $t + \tau$ (ergodicidade).

-O promedio temporal acaba dando lugar a **promedios estatísticos** nalgunha **variable estatística**, p.ex. γ_a , cunha **probabilidade** $P(\gamma_a; \tau)$ describindo fluctuacións relativas (Óptica Estatística). Usualmente e a afectos académicos abonda cunha estatística equiprobable. **Obs.-** Hai f.d.c de orde superior coma p.ex., $\langle \mathbf{E}_{(1)}^* \mathbf{E}_{(2)}^* \mathbf{E}_{(1)} \mathbf{E}_{(2)} \rangle_t \equiv \langle \mathbf{I}_{(1)} \mathbf{I}_{(2)} \rangle_t$.

■ **Grao de coherencia óptica.** Asemade, é interesante reescribir a f.d.c. en forma complexa factorizada en amplitude e fase, é dicir,

$$g_{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = |g_{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \cdot \exp\{i\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)\} = g \cdot \exp\{i\alpha\} \quad (21)$$

g é o módulo da f.d.c., e denomínase **grao de coherencia** da perturbación. Segundo isto, dise que hai coherencia **nula**, se $g=0$; coherencia **parcial** se $0 < g < 1$; e coherencia **total**, se $g=1$. Como veremos, g poderase medir con técnicas interferenciais.

-**Formalmente** obtemos a **f.d.c. temporal** se os puntos $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ son fixos (iguais ou distintos). Alternativamente, a **f.d.c. espacial** obtense se τ é fixo ou cero.

Exer.- 4 Sexa a onda LP e harmónica $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) e^{i\epsilon} e^{i[\mathbf{k}_o \mathcal{L}(\mathbf{r}) - \omega t]} \mathbf{u}$. Achar a función de coherencia e o seu grao de coherencia temporal.

Sol.- Notemos que a amplitude e a fase **non** presentan **flutuacións estatísticas**, é dicir, todo é determinista, $\epsilon \neq \gamma_a$ e $E \neq E(\alpha_a)$. Ademais, debemos considerar dous puntos fixos (coherencia temporal), \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , e variar τ .

Achando os valores do campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\epsilon} e^{i[k_o\mathcal{L}(\mathbf{r})-\omega t]}\mathbf{u}$ en (\mathbf{r}_1, t) e $(\mathbf{r}_2, t + \tau)$ e substituíndo na Ec. (20), a integral en t (promedio temporal en T') é inmediata, é dicir,

$$g_{(1)}(\tau) = \frac{\frac{1}{T'} \int_0^{T'} \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) e^{-i\epsilon} e^{-i[k_o\mathcal{L}(\mathbf{r}_1)-\omega t]}\mathbf{u}^* \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) e^{i\epsilon} e^{i[k_o\mathcal{L}(\mathbf{r}_2)-\omega(t+\tau)]}\mathbf{u} dt}{\left(\frac{1}{T'} \int_0^{T'} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}_1) dt\right)^{1/2} \left(\frac{1}{T'} \int_0^{T'} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}_2) dt\right)^{1/2}} = e^{-i\omega\tau} e^{ik_o\Delta_o}$$

con $\Delta_o = \mathcal{L}(\mathbf{r}_2) - \mathcal{L}(\mathbf{r}_1)$ (se estamos no mesmo punto, $\Delta_o = 0$, pero os resultados non cambian). Daquela, $g = 1$, logo é unha **onda totalmente coherente**, como era de agardar polo carácter determinista (ideal) da onda. Nótese que o cambio nos puntos e-t só introduce unha fase na *f.d.c.*, pero o valor importante é o módulo (grao de coherencia).

Obs.-Se, p.ex., a **frecuencia variase** de xeito aleatorio ao redor dun valor, o promedio temporal sería un promedio estatístico e daría distinto dunha simple fase $e^{-i\omega\tau}$, e ademais $g = |g_{(1)}| < 1$.

1.4.2. INTERPRETACIÓN ESTADÍSTICA [C].

Consideremos dúas **variables aleatorias** x, y que arrojan os valores $\{x_1, \dots, x_N\}$ e $\{y_1, \dots, y_N\}$, e con valores medios \bar{x}, \bar{y} . É ben coñecido que o **coeficiente de correlación** r vén dado pola expresión

$$r = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (22)$$

Se agora consideramos o **caso particular de promedios nulos**, é dicir, $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$, e ademais xeralizamos ao **dominio complexo**, (lembrar produto interior de vectores complexos), a ecuación anterior convértese en

$$r = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^* y_i}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i x_i^*} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i y_i^*}} \equiv \frac{\langle x^* y \rangle}{\sqrt{\langle x x^* \rangle} \sqrt{\langle y y^* \rangle}} \quad (23)$$

Agora podemos comprobar que a función de coherencia non é máis que unha función de correlación. En efecto, facendo os seguintes **cambios formais**

$$x_i \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1 = t_i), y_i \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2 = t_i + \tau) \quad (24)$$

que indican medidas de campos retardados τ en varios (moitos) tempos t_i obtemos a (auto-)correlación do campo,

$$r = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_i) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_i + \tau)}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_i)|^2} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_i + \tau)|^2}} \quad (25)$$

Isto é unha **expresión práctica** (medidas). A **expresión teórica** obtense cos seguintes cambios $\sum_i \rightarrow \int dt (t_i \rightarrow t)$, $N \rightarrow T'$, e obtemos a función de coherencia óptica dada pola Ec. (20)



1.4.3. COHERENCIA TEMPORAL E ESPACIAL E FONTES DE LUZ

■ **Coherencia temporal (ou lonxitudinal)** $g_{(1)}(\tau)$. É a correlación do campo óptico en dous instantes $t_1=t$ e $t_2=t+\tau$ pero no mesmo punto r (ou en dous puntos fixos), é dicir, $g_{(1)}(\tau)$. Está asociada á **anchura espectral da fonte** $\Delta\omega$ (logo a fluctuacións da frecuencia). Pódese formalizar, p.ex., usando pulsos (planos, esféricos, ...) de **tempo medio de coherencia** $t_o \approx 2\pi/\Delta\omega$ con fase inicial aleatoria (rigorosamente hai que a fluctuación aleatoria da frecuencia de pulso a pulso no intervalo $\Delta\omega$).

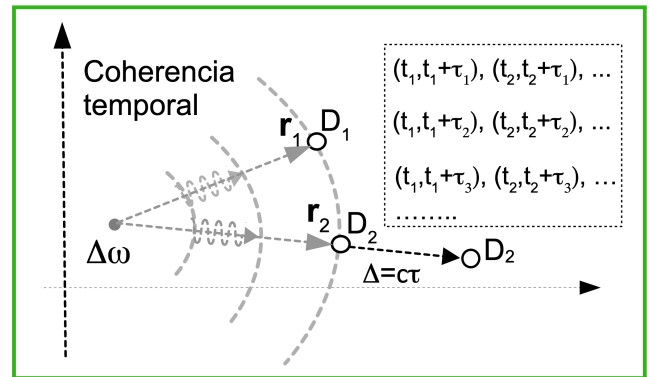
■ **Coherencia espacial (ou transversal)** $g_{(1)}(d)$. é a correlación do campo óptico en dous puntos r_1 e r_2 tal que $|r_1-r_2|=d$, pero no mesmo instante $t=t_1=t_2$ (ou mesmo retraso), é dicir, $g_{(1)}(d)$. Está asociada ás **dimensións (anchura espacial) da fonte** ΔS (fluctuacións da superficie de onda, i.e., do vector de onda local). Pódese formalizar, p.ex., usando pulsos longos (é dicir, $t_o \gg \tau$, logo fonte case-monocromática), pero cada punto emite pulsos cunha fase inicial aleatoria e diferente doutro punto.

-**En xeral** teremos unha función de coherencia espazo-temporal de primeira orde da forma $g_{(1)}(d, \tau)$.

■ **Dificultade da medida directa da coherencia.** É de interese ver a dificultade de medir a coherencia, sendo a medida do campo a primeira grande dificultade. Separamos, por razóns didácticas e mesmo prácticas, a descrición de **como medir** a coherencia temporal e a espacial.

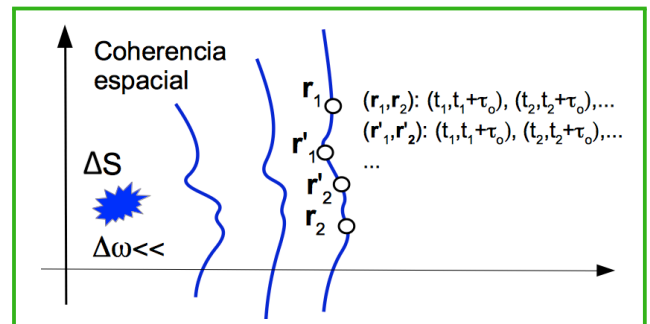
-**Caso temporal.** Sexa unha **fonte puntual policromática** (espacialmente ideal) da que saen pulsos de duración media $t_o \approx 2\pi/\Delta\omega$. Detectamos en dous puntos r_1 e r_2 da fronte de onda (detectores D_1, D_2), e supomos ergodicidade.

Facemos varias medidas do campo en distintos tempos pero co mesmo retardo τ_1 , i.e., $(t_1, t_1+\tau_1), (t_2, t_2+\tau_1), (t_3, t_3+\tau_1), \dots$, e **promediamos** o produto dos campos (un deles c.c.) que dá o valor de $g_{(1)}(\tau_1)$. De seguido cambiamos o retardo e de novo $(t_1, t_1+\tau_2), (t_2, t_2+\tau_2), (t_3, t_3+\tau_2), \dots$, logo $g_{(1)}(\tau_2)$, e así sucesivamente $\forall \tau$, para obter $g_{(1)}(\tau)$ (τ é **implementable**, p.ex., con D_1 e D_2 separados $\Delta=c\tau$).



-**Caso espacial.** Sexa unha **fonte extensa S case-monocromática** (pulsos longos). Detectamos en pares de puntos espaciais $(r_1, r_2), (r'_1, r'_2), \dots$ e facemos promedios de varias medidas (tempos t_1, t_2, \dots) en cada par de puntos.

O valor de $\tau=\tau_o$ debe ser sempre o mesmo, e usualmente $\tau=0$. Ao final de todas as medidas obtemos $g_{(1)}(r_1, r_2)$. En xeral, esta función vai ser da forma $g_{(1)}(d)$, con $d=|r_2-r_1|$, i.e, dependerá en xeral da distancia d entre os puntos e non de onde están situados, análogo ao caso temporal con τ (“ergodicidade” espacial).



1.4.4. ESTATÍSTICA EQUIPROBABLE

Polo dito anteriormente, a coherencia parcial pódese formalizar, p.ex., mediante variacións aleatorias na fase relativa entre os puntos espacio-temporais. Para iso é convinte proporcionar algunha estatística para a fase γ_a das ondas. Un bo modelo é unha **estatística de fase equiprobable** nun determinado intervalo de fase, é dicir, coa seguinte función de probabilidade normalizada

$$P(\gamma_a) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta\gamma_o}, & \gamma_a \in [-\Delta\gamma_o, \Delta\gamma_o] \\ 0, & \gamma_a \notin [-\Delta\gamma_o, \Delta\gamma_o] \end{cases} \quad (26)$$

É de moito interese considerar o promedio de **distintas funcións** coa variable estatística γ_a , especialmente funcións sinusoidais típicas das ondas. P.ex., a función $e^{iq\gamma_a}$, $q \in \mathbb{N}$,

$$\langle e^{iq\gamma_a} \rangle = \int e^{iq\gamma_a} P(\gamma_a) d\gamma_a = \frac{1}{2\Delta\gamma_o} \int_{-\Delta\gamma_o}^{\Delta\gamma_o} e^{iq\gamma_a} d\gamma_a = \frac{e^{iq\Delta\gamma_o} - e^{-iq\Delta\gamma_o}}{2\Delta\gamma_o iq} = \text{senc}(q\Delta\gamma_o) \quad (27)$$

Outros Exems.-É doado comprobar que $\langle e^{-iq\gamma_a} \rangle$ dá o mesmo valor. Coma **corolarios** temos

$$\langle \cos(q\gamma_a) \rangle = (\langle e^{iq\gamma_a} \rangle + \langle e^{-iq\gamma_a} \rangle)/2 = \text{senc}(q\Delta\gamma_o); \quad \langle \text{sen} q\gamma_a \rangle = 0 \quad (28)$$

$$\langle \text{sen} \gamma_a \rangle = (\langle e^{i\gamma_a} \rangle - \langle e^{-i\gamma_a} \rangle)/2i = 0; \quad \langle \cos \gamma_a \rangle = (\langle e^{i\gamma_a} \rangle + \langle e^{-i\gamma_a} \rangle)/2 = \text{senc} \Delta\gamma_o \quad (29)$$

$$\langle \cos^2 \gamma_a \rangle = \frac{1}{4} \langle (e^{i\gamma_a} + e^{-i\gamma_a})^2 \rangle = \langle \frac{1}{4} (2 + e^{i2\gamma_a} + e^{-i2\gamma_a}) \rangle = (1/2) [1 + \text{senc}(2\Delta\gamma_o)] \quad (30)$$

Casos de maior interese. O valor límite $\Delta\gamma_o = \pi$ e $q=1$ é usual en cálculos opto-estadísticos (p.ex. en polarización, na coherencia temporal e espacial, etc).

$$\langle \cos \gamma_a \rangle = \langle \text{sen} \gamma_a \rangle = 0, \quad \langle \cos^2 \gamma_a \rangle = \langle \text{sen}^2 \gamma_a \rangle = 1/2 \quad (31)$$

Exer.- 5 A Luz Natural pódese expresar como $\mathbf{E}(z, t) = E_o(\cos \gamma_a \mathbf{u}_x + \text{sen} \gamma_a \mathbf{u}_y) e^{i[k_o z - \omega t]}$ (expresión estatística de luz totalmente despolarizada, uando a fase relativa γ_a totalmente aleatoria,). Se atravesa un polarizador co eixo de transmisión a α graos co eixo x, achar o campo transmitido $\mathbf{E}_\alpha(z, t)$ e a intensidade.

Sol.-Formalmente temos $\mathbf{E}_\alpha(z, t) = E_o(\cos \gamma_a \cos \alpha + \text{sen} \gamma_a \text{sen} \alpha) \mathbf{u}_\alpha e^{i[k_o z - \omega t]}$. De seguido achamos a intensidade

$$I = \langle |\mathbf{E}_\alpha|^2 \rangle = E_o^2 \langle \cos^2 \gamma_a \cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \gamma_a \text{sen}^2 \alpha + \text{sen}(2\gamma_a) \cos \alpha \text{sen} \alpha \rangle$$

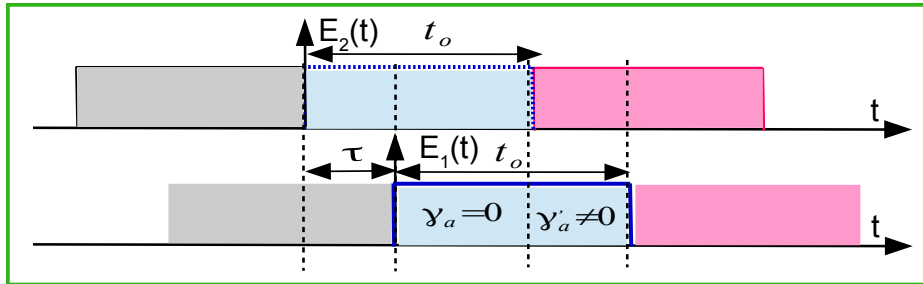
e facendo os promedios estadísticos obtemos

$$I = E_o^2 [(1/2) \cos^2 \alpha + (1/2) \text{sen}^2 \alpha + 0] = E_o^2 / 2 = I_o / 2$$

é dicir, un polarizador lineal deixa pasar a metade de intensidade de luz natural ou despolarizada como é ben coñecido.

Exer.- 6 Sexan pulsos LP de duración media t_o con $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\gamma} e^{ik_o\mathcal{L}(\mathbf{r})} e^{-i\omega_c t} \mathbf{u}$, onde γ aleatoria de pulso a pulso e con estatística equiprobable. Achar o grao de coherencia temporal. (Recordatorio de notación: $k_o\mathcal{L}(\mathbf{r}) = (\omega_c/c)n(\omega_c)s(\mathbf{r}) = k_c s(\mathbf{r})$, con $s(\mathbf{r})$ a superficie de onda; ver sección 1.3.2 para máis detalles.)

Sol.-Seguimos o feito no Exer. 4. Sexan dous detectores ideais de campo nos puntos fixos \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , logo temos a diferenza de fase $\Delta\mathcal{L}_o \equiv \Delta_o = \mathcal{L}(\mathbf{r}_2) - \mathcal{L}(\mathbf{r}_1)$. Formalmente multiplícase o valor do campo nun instante $t+\tau$: $E_2(t+\tau) = E_2(t')$ polo seu valor no instante t : $E_1(t) = E_1(t'-\tau)$. Isto é equivalente a multiplicar E_2 (pulso azul superior) por E_1 retardado τ (azul inferior) (p.ex., “agardamos” τ , ver sec. 1.4.3). Segundo a Ec. (20) temos a diferenza de fase aleatoria $-\gamma_1 + \gamma_2$ que segue a ser aleatoria e vén dada pola expresión (non relevante) $\gamma_a = -\gamma(t) + \gamma(t+\tau) \equiv -\gamma(t'-\tau) + \gamma(t')$.



Coma no Exer. 4 a *f.d.c.* obtense da Ec. (20) substituíndo os valores do campo avaliados nos dous puntos e-t. O promedio farase nun $T' = Nt_o$ (con $N \gg 1$, o número de pulsos), logo a expresión da función de coherencia $g_{(1)}$ será

$$g_{(1)}(\tau) = \frac{\frac{1}{Nt_o} \int_0^{Nt_o} \mathbf{E}(\mathbf{r}_1) e^{-i\gamma_a(t)} e^{-i[k_o\mathcal{L}(\mathbf{r}_1) - \omega_c t]} \mathbf{u}^* \mathbf{E}(\mathbf{r}_2) e^{i\gamma_a(t+\tau)} e^{i[k_o\mathcal{L}(\mathbf{r}_2) - \omega_c(t+\tau)]} \mathbf{u} dt}{\left(\frac{1}{Nt_o} \int_0^{Nt_o} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}_1) dt\right)^{1/2} \left(\frac{1}{Nt_o} \int_0^{Nt_o} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}_2) dt\right)^{1/2}} = e^{i\varphi_o} \langle e^{i\gamma_a} \rangle_t$$

con $\varphi_o = k_o\Delta_o - \omega_c\tau$, e $\gamma_a = \gamma_a(t+\tau) - \gamma_a(t)$. Tendo en conta agora os intervalos temporais de integración,

$$g_{(1)} = \frac{e^{i\varphi_o}}{Nt_o} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\tau+(j-1)t_o}^{t_o+(j-1)t_o} e^{i\cdot 0} dt + \int_{t_o+(j-1)t_o}^{t_o+\tau+(j-1)t_o} e^{i\gamma_{aj}} dt \right) = \frac{e^{i\varphi_o}}{Nt_o} \left\{ N \int_{\tau}^{t_o} e^{i\cdot 0} dt + \sum_{j=1}^N \int_{t_o}^{t_o+\tau} e^{i\gamma_{aj}} dt \right\} = e^{i\varphi_o} \left\{ \left(1 - \frac{\tau}{t_o}\right) + \frac{\tau}{t_o} \frac{\sum_{j=1}^N e^{i\gamma_{aj}}}{N} \right\} = e^{i\varphi_o} \left\{ \left(1 - \frac{\tau}{t_o}\right) + \frac{\tau}{t_o} \langle e^{i\gamma_a} \rangle \right\} = e^{i\varphi_o} \left\{ 1 - \frac{\tau}{t_o} \right\} \quad (32)$$

logo

$$|g_{(1)}(\tau)| = \left(1 - \frac{\tau}{t_o}\right), \tau \in [0, t_o]; \quad |g_{(1)}(\tau)| = 0, \tau > t_o \quad (33)$$

Nótese, como xa foi comentado, que a 2ª integral de **promedio temporal convértese nun promedio estatístico**, é dicir, $\langle e^{i\gamma_a} \rangle$, e que neste caso toma o valor particular cero. -Se houbose unha **certa correlación** (fases que non fluctuaran totalmente) $\langle e^{i\gamma_a} \rangle \neq 0$ entón teríamos outra función de coherencia. **Por exemplo**, se por algún motivo a fase só fluctúa entre $\pm\Delta\gamma_o$ entón teríamos

$$|g_{(1)}(\tau)| = \left\{ \left(1 - \frac{\tau}{t_o}\right) + \frac{\tau}{t_o} \text{senc}(\Delta\gamma_o) \right\}, \tau \in [0, t_o]; \quad |g_{(1)}(\tau)| = 0, \tau > t_o \quad (34)$$

que no límite ideal de non fluctuacións, i.e., $\Delta\gamma_o = 0$ (luz pura e-t) dá $|g_{(1)}(\tau)| = 1$.



1.5. TEORÍA XERAL DA INTERFERENCIA

1.5.1. VECTOR DE POYNTING INTERFERENCIAL [C]

Un proceso interferencial é o resultado da **superposición** de ondas luminosas. Sexan dúas ondas LP e **policromáticas** de igual frecuencia central ω , con campos $\mathbf{E}_i = \mathcal{E}_i e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}_i = \mathcal{H}_i e^{-i\omega t}$, $i=1, 2$. O vector de **Poynting** é

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \Re(\mathcal{E}_T \wedge \mathcal{H}_T^*) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \Re(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \wedge (\mathcal{H}_1^* + \mathcal{H}_2^*) \right\rangle \quad (35)$$

con $\mathcal{E}_i = \mathbf{E}_i e^{ik_o \mathcal{L}_i}$ e $\mathcal{H}_i = \mathbf{H}_i e^{ik_o \mathcal{L}_i}$, e onde consideramos que hai variacións temporais da amplitude (deterministas ou aleatorias) que precisen dun promedio adicional.

-O módulo da Ec. (35) dá a expresión **exacta** da intensidade interferencial. Usando a expresión da LIF para **ondas LP**, i.e., $(\nabla \mathcal{L} \wedge \mathbf{E}) / (c\mu_o) = \mathbf{H}$, e denotando $\Phi = k_o \Delta = k_o(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1)$, obtemos para o primeiro termo cruzado da Ec. (35)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) \wedge \mathcal{H}_2^*(\mathbf{r}, t) &= [\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \wedge \mathbf{H}_2^*(\mathbf{r}, t)] e^{ik_o(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2)} \approx [\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \wedge \frac{\nabla \mathcal{L}_2 \wedge \mathbf{E}_2^*}{c\mu_o}] e^{-i\Phi} = \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_o}{\mu_o}} \{ (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^*) \nabla \mathcal{L}_2 - (\mathbf{E}_1 \cdot \nabla \mathcal{L}_2) \mathbf{E}_2^* \} e^{-i\Phi} = \epsilon_o c \{ (\mathcal{E}_1 \cdot \mathcal{E}_2^*) \nabla \mathcal{L}_2 - (\mathcal{E}_1 \cdot \nabla \mathcal{L}_2) \mathcal{E}_2^* \} \quad (36) \end{aligned}$$

Unha expresión semellante obtense para o termo $\mathcal{E}_2(\mathbf{r}, t) \wedge \mathcal{H}_1^*$ ($1 \leftrightarrow 2$). Nos casos non cruzados, é dicir, $\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) \wedge \mathcal{H}_1^*$ e $\mathcal{E}_2(\mathbf{r}, t) \wedge \mathcal{H}_2^*$, o termo negativo da ecuación anterior anúlase (**transversalidade local**). Logo a Ec. (35) escríbese finalmente como

$$\boxed{\langle \mathbf{S} \rangle = (1/2) \epsilon_o c \langle \Re \{ [\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathcal{E}_1^*(\mathbf{r}, t)] \nabla \mathcal{L}_1 + [\mathcal{E}_2(\mathbf{r}, t) \mathcal{E}_2^*(\mathbf{r}, t)] \nabla \mathcal{L}_2 + [\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) \mathcal{E}_2^*(\mathbf{r}, t)] \nabla \mathcal{L}_2 - [\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) \nabla \mathcal{L}_2] \mathcal{E}_2^* + [\mathcal{E}_2(\mathbf{r}, t) \mathcal{E}_1^*(\mathbf{r}, t)] \nabla \mathcal{L}_1 - [\mathcal{E}_2(\mathbf{r}, t) \nabla \mathcal{L}_1] \mathcal{E}_1^* \} \rangle} \quad (37)$$

1.5.2. FORMA XERAL E NORMAL DA INTERFERENCIA.

Baixo a aproximación $\nabla \mathcal{L}_1 \approx \nabla \mathcal{L}_2 \approx \nabla \mathcal{L}$ (**proximidade da fase local**) a Ec. (37) toma a forma $\langle \mathbf{S} \rangle \approx |\langle \mathbf{S} \rangle| \nabla \mathcal{L}$, logo a expresión xeral para a intensidade interferencial “reducida” (sen $(1/2)\epsilon_o c n$) e tendo en conta que $\mathbf{E}_i = \mathcal{E}_i e^{-i\omega t}$ toma a **forma (expresión) xeral**

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{S} \rangle| \rightarrow I(\mathbf{r}, t) &\approx \langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_1^* \rangle + \langle \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2^* \rangle + \langle \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 \rangle + \langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* \rangle = \\ &= \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)(\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*) \rangle = \langle |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 \rangle = \langle \mathbf{E}_T \mathbf{E}_T^* \rangle \end{aligned}$$

logo

$$\boxed{I(\mathbf{r}, t) = \langle |\mathbf{E}_T|^2 \rangle = \langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_1^* \rangle + \langle \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2^* \rangle + 2\langle \Re(\mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2) \rangle} \quad (38)$$

Nótese que os **promedios temporais** $\langle \rangle$ son debidos ás envolventes e a posibles fluctuacións do campo co paso do tempo. Ademais, a intensidade interferencial I é a suma dunha intensidade $I_{\text{inc}} = I_1 + I_2$ chamada **incoherente** con outra **coherente** $I_{\text{coh}} = 2\langle \Re(\mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2) \rangle$, típica da interferencia.

-Alternativamente podemos escribir a expresión anterior, á que chamaremos **forma normal**, como

$$I = (\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_1^* \rangle + \langle \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2^* \rangle) \left\{ 1 + \frac{2\langle \Re(\mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2) \rangle}{\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_1^* \rangle + \langle \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2^* \rangle} \right\} \quad (39)$$



Observacións importantes sobre a intensidade interferencial obtida

i. Os termos coherentes suxiren unha implementación física da función de **coherencia óptica**, é dicir, nótese que formalmente $\langle \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 \rangle \propto g_{(1)}$.

ii. Con **polarización case-global** das ondas LP nunha rexión, se as dúas ondas son **ortogonais** entón $\langle \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 \rangle \propto \mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2 \approx 0$, logo $I_{\text{coh}} = 0$, e desaparece a interferencia.

iii. Se os campos teñen a mesma polarización, $\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2 \approx 1$, entón temos a chamada **teoría escalar da interferencia**.

iv. A Ec. (38) pódese utilizar formalmente para estimar a intensidade interferencial de ondas CH (case-harmónicas) de **distinta frecuencia** central: o promedio dos termos cruzados dá $\langle e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} + \text{c.c.} \rangle$ é nulo, é dicir, $I_{\text{coh}} = 0$, logo desaparece a interferencia.

v. Se, p.ex., $\nabla L \approx \mathbf{u}_z$ (**ondas paraxiais, polarización global**), a interferencia pódese achar como

$$I(\mathbf{r}, t) = \langle |E_{1x} + E_{2x}|^2 + |E_{1y} + E_{2y}|^2 \rangle = \langle I_x \rangle + \langle I_y \rangle \quad (40)$$

1.5.3. INTERFERENCIA DE ONDAS LP E C-M

Sexan dúas ondas LP, e c-m (case-monocromáticas, i.e. $t_o \gg \lambda$) de igual frecuencia e igual polarización case-global (en xeral ondas paraxiais), con campos ópticos

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_j(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} = \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) e^{i\{k_o \mathcal{L}_j(\mathbf{r}) - \omega t\}} = \mathbf{E}_j(\mathbf{r}) e^{i\epsilon_j} e^{i\{k_o \mathcal{L}_j(\mathbf{r}) - \omega t\}} \mathbf{u}_j \quad (41)$$

onde $j = 1, 2$ e con \mathbf{u}_j vectores unitarios complexos representando a polarización case-global da onda.

■ **Intensidade interferencial.** Para obter a intensidade interferencial (reducida) hai que achar: $I(\mathbf{r}) = |\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t)|^2 = |\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) e^{i\epsilon_1} e^{i k_o \mathcal{L}_1(\mathbf{r})} \mathbf{u}_1 + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) e^{i\epsilon_2} e^{i k_o \mathcal{L}_2(\mathbf{r})} \mathbf{u}_2|^2$.

Daquela, se usamos as expresións $\Delta = \{\mathcal{L}_2(\mathbf{r}) - \mathcal{L}_1(\mathbf{r})\}$, que é unha diferenza de camiño óptico, $\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$, $\epsilon' = \arg(\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2)$, obtemos

$$I(\mathbf{r}) = E_1^2(\mathbf{r}) + E_2^2(\mathbf{r}) + E_1(\mathbf{r}) E_2(\mathbf{r}) |\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2| (e^{i(k_o \Delta + \epsilon + \epsilon')} + \text{c.c.})$$

logo

$$I(\mathbf{r}) = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 |\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2| \cos \Phi = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} |\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2| \cos \Phi \quad (42)$$

con **fase interferencial**

$$\Phi(\mathbf{r}) = k_o [\mathcal{L}_2(\mathbf{r}) - \mathcal{L}_1(\mathbf{r})] + \epsilon + \epsilon' = k_o \Delta(\mathbf{r}) + \epsilon + \epsilon'. \quad (43)$$

As amplitudes dos campos pódense reescribir tamén en funcións dos factores de amplitude $E_j(\mathbf{r}) = A_{oj} F_j(\mathbf{r})$. Así con **ondas planas** teríamos $F_j(\mathbf{r}) = 1$, esféricas: $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_o|$, esféricas paraxiais: $1/(z - z_o)$, etc. En boa aproximación, moitos dos casos de interferencia (pola **proximidade de fase local**) cumpren: $F_1 \approx F_2 \approx F$, logo un factor global non relevante,

$$I(\mathbf{r}) = F^2(\mathbf{r}) \{A_{o1}^2 + A_{o2}^2 + 2A_{o1} A_{o2} |\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2| \cos \Phi(\mathbf{r})\} \quad (44)$$

Nótese, como adiantamos, que os campos con **polarizacións ortogonais** non interfieren; e se $\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2 = 1$ (**igual polarización**) temos a teoría escalar da interferencia.

-**Franxas interferenciais.** A ecuación $I(\mathbf{r}) = cte = I_M$ nun plano de observación, p.ex., $z = D$, define liñas de intensidade máxima I_M , i.e., en $\Phi(x, y, D) = 2m\pi$. As franxas interferenciais son bandas luminosas cuxas fronteiras veñen dadas polo lugar xeométrico de puntos definidos por dous mínimos consecutivos de intensidade interferencial, logo incluíndo I_M . Ademais, $I(\mathbf{r}) = cte$ tamén define a xeometría das **franxas interferenciais**.



-Interfranxa. É a distancia entre dous mínimos consecutivos (ou máximos consecutivos) de interferencia.

-Visibilidade ou contraste. Vén definida, e particularizada segundo as Ecs. (42) e (44), como

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2 E_1 E_2 |\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2|}{E_1^2 + E_2^2} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} |\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2|}{I_1 + I_2} = \frac{2A_{o1} A_{o2} |\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2|}{(A_{o1}^2 + A_{o2}^2)} \quad (45)$$

Fisicamente, a \mathcal{V} corresponde a ter maior ou menor **contraste dos máximos** de intensidade, e daquela da interferencia. Contraste máximo $\mathcal{V}=1$ significa máximos de luz sobre “fondo” (mínimos) escuro (nulos), noutro caso “fondo” (mínimos) “gris” (non nulos).

■ **Expresión (ou Forma) normal de interferencia.** Tendo en conta as Ecs. (42) e (45) obtemos, para estas ondas, a chamada expresión ou forma normal de interferencia,

$$I(\mathbf{r}) = (I_1 + I_2) \{1 + \mathcal{V} \cos \Phi\} \quad (46)$$

Nótese que a forma normal identifica a visibilidade \mathcal{V} coma o coeficiente do coseno interferencial.

Exems.- Comezamos con dúas ondas LP **linealmente polarizadas** ($\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ reais, formando un ángulo θ), entón

$$\mathcal{V} = \frac{2 A_{o1} A_{o2} \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2}{(A_{o1}^2 + A_{o2}^2)} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta}{I_1 + I_2} \quad (47)$$

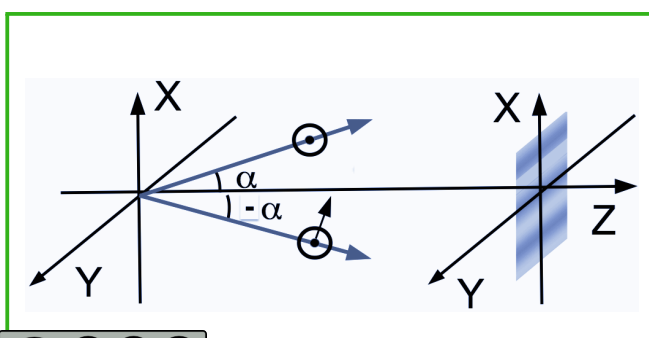
Nótese que se $\theta = \pi/2$ entón $\mathcal{V} = 0$, é dicir, desaparece a interferencia. Se supomos que $\theta \approx 0$ entón $\mathcal{V} = 2\sqrt{I_1 I_2}/(I_1 + I_2)$.

-Se tivéssemos ondas planas CL e CD teríamos $\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2 = (1/2)(1, -i)(1, -i) = 0$, logo $\mathcal{V} = 0$. Se as dúas fosen CL: $\mathbf{u}_1^* \mathbf{u}_2 = (1/2)(1, -i)(1, i) = 1$.

-Finalmente, se $I_1 \gg I_2$ (ou viceversa) entón $\mathcal{V} \approx 0$, e se $I_1 \approx I_2$ obtemos $\mathcal{V} \approx \cos \theta$, e se $\theta = 0$ entón $\mathcal{V} \approx 1$

Todas estas \mathcal{V} son de orixe coherente, xa que, como probaremos, pódese ter $\mathcal{V} < 1$ inda que teñan a mesma polarización e $I_1 = I_2$, i.e., debido á incoherencia.

Exer.- 7 Sexan dúas ondas planas mutuamente coherentes de intensidade unidade, frecuencia ω , vectores de onda no plano xz formando ángulos $\pm\alpha$ co eixo z e polarizacións: y -lineal (con fase inicial $-\pi/2$) e circular levóxira. 7.1.-Achar a interferencia nun plano z e analizar o padrón interferencial (máxs, míns, \mathcal{V} , xeometría das franxas, i , ...) . 7.2.- *Idem* se as ondas proceden de dous puntos luminosos moi lonxanos (independentes) $(\pm a, 0, -L)$, $L \gg a$, de igual amplitude E_o , frecuencia central ω_c e polarización \mathbf{u}_y .



Sol.-7.1.- A onda plana propagándose a α vibra ao longo de y logo temos $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_y$ (ver Figura). A segunda onda ten polarización circular levóxira respecto ao SR definido por o vector contido no plano de incidencia (compoñente TM) e o vector \mathbf{u}_y (TE): $\mathbf{u}_2 = [(\cos \alpha \mathbf{u}_x + \sin \alpha \mathbf{u}_z) + e^{i\pi/2} \mathbf{u}_y] / \sqrt{2}$.



Achando os vectores de onda, as dúas ondas planas teñen as seguintes expresión (a 1ª con fase inicial $-\pi/2$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= e^{-i\pi/2} \mathbf{E}_0 \mathbf{u}_y e^{ik_o(\sin \alpha x + \cos \alpha z)} e^{-i\omega t} \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} [(\cos \alpha \mathbf{u}_x + \sin \alpha \mathbf{u}_z) + e^{i\pi/2} \mathbf{u}_y] e^{ik_o(-\sin \alpha x + \cos \alpha z)} e^{-i\omega t} \equiv \\ &\equiv E_0 \mathbf{u}_2 e^{ik_o(-\sin \alpha x + \cos \alpha z)} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

Lembremos que a intensidade total en promedio temporal vén dada pola expresión $I_T = |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 = \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2^* \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*$, logo obtemos

$$\begin{aligned} I_T &= E_0^2 + E_0^2 + E_0^2 [e^{i\pi/2} e^{-2ik_o \sin \alpha x} \mathbf{u}_y^* \mathbf{u}_2 + e^{-i\pi/2} e^{2ik_o \sin \alpha x} \mathbf{u}_y \mathbf{u}_2^*] = \left\{ \mathbf{u}_y^* \mathbf{u}_2 = \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}} \right\} = \\ &= 2E_0^2 \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2k_o \sin \alpha x - \pi) \right\} \approx \{\alpha \ll \} \approx 2E_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2k_o \alpha x) \right\} \end{aligned}$$

Análise.- A I_T só varía en x de forma cosenoidal. A xeometría das franxas interferenciais (liñas de igual I_T) nun plano de observación z son liñas rectas paralelas ao eixo y (franxas lineais) xa que $I_T = cte$ se $x = cte$. No tocante aos máximos e mínimos obtemos

$$\text{Max. } 2k_o \alpha x = (2m + 1)\pi \rightarrow X_m = (2m + 1)\pi / 2k_o \alpha = \lambda_o(m + 1/2) / 2\alpha$$

$$\text{Min. } 2k_o \alpha x = (2m)\pi \rightarrow x_m = (2m)\pi / 2k_o \alpha = \lambda_o m / 2\alpha$$

A visibilidade é $\mathcal{V} = 1/\sqrt{2}$, é dicir, un 71%. A **interfranja** é a distancia entre mínimos consecutivos (máis doado medilos, pero tamén pode ser entre máximos), logo

$$i = x_{m+1} - x_m = \lambda_o(m + 1) / 2\alpha - \lambda_o m / 2\alpha = \lambda_o / 2\alpha.$$

Sol.-7.2.- Se agora consideramos dúas ondas procedentes de **puntos moi lonxanos**, é dicir, de $(\pm a, 0, -L)$, **e ademais independentes**, a súas expresións serán, tendo en conta que se aproximan a ondas planas con $\alpha_o \approx a/L$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{A'_o}{L} e^{ik_o \frac{a^2}{2L}} \mathbf{u}_y e^{ik_o[-\alpha_o x + z]} e^{-i\omega t} e^{i\gamma_{a1}}, \quad \mathbf{E}_2 = \frac{A'_o}{L} e^{ik_o \frac{a^2}{2L}} \mathbf{u}_y e^{ik_o[\alpha_o x + z]} e^{-i\omega t} e^{i\gamma_{a2}}$$

onde as fases γ_{a1}, γ_{a2} son **fases totalmente aleatorias** (e en xeral equiprobables) dada a independencia estatística das fontes. **Tivemos en conta** que unha fonte de luz c-m pódese visualizar coma un emisor dunha sucesión de pulsos case-rectangulares (moi longos) que cambian a súa fase inicial de forma impredecible. A intensidade interferencial é

$$\langle I_T \rangle = 2 \frac{A_o^2}{L^2} \{ 1 + \langle \cos(2k_o \alpha_o x + \gamma_{a2} - \gamma_{a1}) \rangle \}$$

onde temos que facer o **promedio estatístico** (temporal) dada a variación aleatoria da fase $\gamma_a = \gamma_{a2} - \gamma_{a1}$, pero sabemos que

$$\langle \cos(2k_o \alpha_o x + \gamma_a) \rangle = \cos(2k_o \alpha_o x) \langle \cos \gamma_a \rangle - \sin(2k_o \alpha_o x) \langle \sin \gamma_a \rangle = 0$$

logo desaparece a interferencia, i.e., $\langle I_T \rangle = 2A_o^2 / L^2$. Pero se, por algunha razón, a fluctuación desa fase se reduce, p.ex., a $\gamma_a \in (-\pi/2, \pi/2)$, entón $\Delta \gamma_o = \pi/2$, e da Ec. (29) temos $\langle \cos \gamma_a \rangle = 2/\pi$, logo

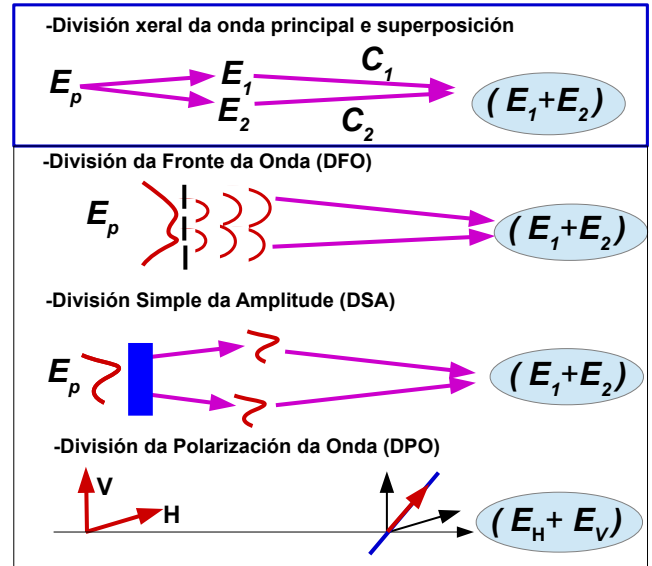
$$\langle I_T \rangle = 2 \frac{A_o^2}{L^2} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \cos(2k_o \alpha_o x) \right\}, \text{ i.e., } \mathcal{V} = 2/\pi \approx 0.64$$

Logo estamos ante o problema de como obter campos coherentes entre sí, i.e., que interfiran.



1.5.4. MÉTODOS DE OBTENCIÓN DE INTERFERENCIA

A condición indispensable para ter interferencia (ideal) é ter ou producir dous campos (ou máis) de igual ω_c e mutuamente coherentes (ou alomenos con coherencia mutua parcial), é dicir, $\langle \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 \rangle \propto g_{(1)} \neq 0$. Esta condición suxire que os campos se obteñan por división dun campo principal \mathbf{E}_p (ver Figura). Os métodos que imos ver en detalle son a División da Fronte de Onda (DFO) e a División Simple de Amplitude (DSA). Hai tamén outros como a División de Polarización de Onda (DPO).



1.5.5. DIVISIÓN DE POLARIZACIÓN DA ONDA (DPO)

Os campos así divididos acumulan unhas fases $\Phi_i, i=H, V$, por ter, por mor da polarización “camiños ópticos” (H, V) distintos, e posteriormente superpóñense (de xeito natural ou inducido). Por exemplo, un retardador de fase $\Delta\Phi = \Phi_V - \Phi_H$ no plano $z=0$ e sito entre dous polarizadores dá unha intensidade interferencial. No caso en que o primeiro e o segundo polarizador están a $\pi/4$ respecto ao SRP da lámina, e iluminemos cunha onda plana de luz natural de intensidade I_o , obtemos despois da lámina (Exer)

$$\mathbf{E}_{z>0} = e^{i\Phi_H} \frac{\sqrt{I_o}}{\sqrt{2}} (\mathbf{u}_H + e^{i\Phi} \mathbf{u}_V) / \sqrt{2} \rightarrow \{2^\circ \text{ Polar.}\} \rightarrow I = \frac{I_o}{4} (1 + \cos \Delta\Phi) \quad (48)$$

-Fotoelasticidade. É un exemplo de interferencia de DPO pola acción selectiva local (depende do punto) sobre a fase de cada onda linealmente polarizada de entrada, é dicir, no SRP temos, como é ben sabido, $\Phi_H = k_o(n_H - 1)d, \quad \Phi_V = k_o(n_V - 1)d$.

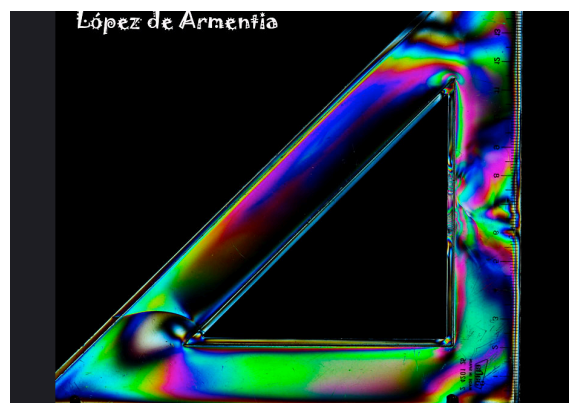
A superposición obtense cun polarizador (analyzer). O camiño (espesor) xeométrico d pode ser constante ou variable. No modelo máis simple consideramos cambios (lentos) de índices principais co punto $n_H = n_H(x, y), n_V = n_V(x, y)$

$$\Delta n(x, y) = n_V(x, y) - n_H(x, y)$$

Usando este modelo simple e un analizador a $\pi/4$, obtemos de (48) a intensidade interferencial

$$I(x, y) = I_o \{1 + \cos \Delta\Phi(x, y)\}, \quad \Delta\Phi(x, y) = k_o(n_V - n_H)d = (\omega/c) \Delta n(x, y)d \quad (49)$$

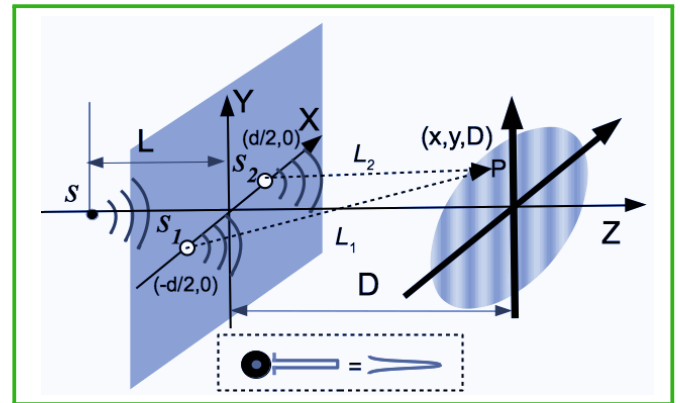
Nótese que segundo o valor de $\Delta n(x, y)$ teremos máximos en distintas frecuencias ω , xerando un aspecto coloreado (interferencia). Obs.-No caso máis xeral habería que considerar tamén o cambio local (rotación) do SRP.



2. Interferencia por División da Fronte de Onda

2.1. INTERFERÓMETRO DE YOUNG (IY)

-Na Figura móstrase un IY con dous buratiños $(\mp d/2, 0)$ en $z=0$ e un plano de observación en $z=D$. Nótese o **dominio finito da superposición** (interferencia) das ondas secundarias polo seu **tamaño finito**. Pódese xustificar tendo en conta que un buratiño é unha distribución de intensidade localizada coma nun Gaussiano (ten un certo “tamaño finito”), pero abrupta, p.ex., unha función de **intensidade tipo “pilar”**.



2.1.1. ESTUDO INTERFERENCIAL CASE-ONDULATORIO

■ **Procedemento xeral de cálculo interferencial C-O.** Para ondas LP con proximidade de fase podemos en xeral achar a intensidade interferencial $I(\mathbf{r})$ mediante un **estudo case-ondulatorio** (C-O) (ou case-xeométrico), coma unha moi boa primeira aproximación. En efecto, da Ec. (42), no caso de igual polarización, obtemos $I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Phi$, logo só hai que achar Φ, I_1, I_2 .

Paso i.- Cálculo da fase Φ interferencial da Ec. (43) coma unha diferenza de LCO $\mathcal{L}_2(\mathbf{r})$ e $\mathcal{L}_1(\mathbf{r})$, é dicir, $\Phi = k_o\Delta(\mathbf{r}) = k_o[\mathcal{L}_2(\mathbf{r}) - \mathcal{L}_1(\mathbf{r})]$ (e outras fases ϵ, ϵ').

Paso ii.- Estimación das intensidades I_i de cada onda no plano de observación (se son iguais ou distintas, ou estimar cantidades ás que son proporcionais, etc).

■ **Exemplo de cálculo interferencial C-O no IY. [C]** Sexa unha **fonte luminosa primaria** S puntual en eixo case-monocromática que ilumina dous buratiños S_1 e S_2 , sitios en $\mathbf{r}_1=(-d/2, 0, 0)$ e $\mathbf{r}_2=(+d/2, 0, 0)$. Estes convértense en fontes **case-puntuais** secundarias, e o resultado é observado nun punto xenérico $P=(x, y, z=D)$, i.e., no plano $z=D$ (ver Figura). A proximidade de fase obtense se $d \ll D$.

i.- No caso do IY temos as funcións LCO $\mathcal{L}_i(\mathbf{r}) \equiv S_i P = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|, i=1, 2$. Da Figura temos

$$\Delta(\mathbf{r}) = S_2 P - S_1 P = [(x - \frac{d}{2})^2 + y^2 + D^2]^{1/2} - [(x + \frac{d}{2})^2 + y^2 + D^2]^{1/2} \quad (50)$$

Baixo a aproximación paraxial (parabólica), é dicir, $D \gg x, y, d$, obtemos a fase interferencial Φ ,

$$\Delta(\mathbf{r}) \approx -xd/D \Rightarrow \Phi = k_o\Delta = -k_o xd/D \quad (51)$$

Polo tanto, a distribución de intensidade do padrón interferencial escalar (ou de igual polarización) vén dada nas súas formas xeral e normal polas expresións

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos(k_o\frac{xd}{D}), \quad I(\mathbf{r}) = Q\{1 + \mathcal{V}\cos(k_o\frac{xd}{D})\} \quad (52)$$

con $Q=I_1+I_2$ a intensidade total, e $\mathcal{V}=2\sqrt{I_1I_2}/(I_1+I_2)$ a visibilidade do padrón interferencial.

ii.- Se os **buratiños son iguais** e a iluminación é simétrica entón estimamos os valores $I_1 = I_2 = I_o (\propto 1/L^2 D^2)$, logo $I(\mathbf{r}) = 2I_o[1 + \cos(k_o\frac{xd}{D})]$. Se o IY estivera mergullado nun medio material de **índice n** debemos facer o **cambio $k_o \rightarrow k_o n$** en todas as expresións.



2.1.2. ESTUDO INTERFERENCIAL ONDULATORIO.

■ **Ondas emerxentes dos buratiños.** Sexa un IY iluminado cunha onda paraxial procedente dunha fonte puntual primaria S a unha distancia L do plano $z=0$ dos buratiños (ver Fig. na pax. 18) con polarización case-global \mathbf{u} , e fase inicial ϵ_S (mesmo variable co t e aleatoria), logo en $z=0$ temos

$$\mathbf{E}_S(x, y, 0) = E_S(x, y, 0)\mathbf{u} = E_o e^{i\epsilon_S} e^{ik_o L} e^{ik_o \frac{x^2+y^2}{2L}} \mathbf{u}, \quad E_o = \frac{A_o}{L} \quad (53)$$

É obvio que do plano $z=0$ emerxen dúas ondas esféricas paraxiais dadas pola expresión

$$\mathcal{E}_{(1)}^{(2)}(\mathbf{r}) = A_{(b1)}^{(b2)} \frac{e^{ik_o z}}{z} e^{ik_o \frac{(x \mp d/2)^2 + y^2}{2z}} \mathbf{u}_{(1)}^{(2)} \rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \rightarrow I = |\mathcal{E}|^2 \quad (54)$$

onde é tamén intuitivo e doado de probar que os factores de amplitude $A_{(b1)}$ e $A_{(b2)}$ teñen a expresión

$$A_{(b1)}^{(b2)} = \frac{|t_{(b1)}^{(b2)}| e^{i\epsilon_{(1)}^{(2)}}}{(i\lambda_o)} E_S(\pm d/2, 0, 0) = \frac{|t_{(b1)}^{(b2)}| e^{i\epsilon_{(1)}^{(2)}}}{(i\lambda_o)} \frac{A_o}{L} e^{i\epsilon_S} e^{i\{k_o L + k_o \frac{(\pm d/2)^2}{2L}\}} \quad (55)$$

é dicir, con factores de amplitude dados polos valores do campo incidente nos buratiños 1 e 2: $E_S(\pm d/2, 0, 0)$ multiplicados polos coeficientes de transmisión $t_{bj} = |t_{bj}| e^{i\epsilon_j}$ dos buratiños e por un factor $(1/i\lambda_o)$ (con fendas sería o valor do campo nas fendas e un factor $1/\sqrt{i\lambda_o}$). Asemade, \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 son vectores unitarios complexos por mor de posibles cambios de polarización nos buratiños.

Exer.-Achar $A_{(b1)}^{(b2)}$ para onda plana incidente de frecuencia ω , $\mathbf{s} = (\alpha, 0, 1)$ e amplitude E_o .
Sol.-Onda incidente: $E_o e^{ik_o \alpha x}$, logo: $A_{b1} = \frac{|t_{b1}| e^{i\epsilon_1}}{i\lambda_o} E_o e^{-ik_o \alpha \frac{d}{2}}$, $A_{b2} = \frac{|t_{b2}| e^{i\epsilon_2}}{i\lambda_o} E_o e^{+ik_o \alpha \frac{d}{2}}$.

■ **Derivación de $A_{(b1)}$ e $A_{(b2)}$ por c.c. nos buratiños. [C]** Nos buratiños podemos supoñer, en boa aproximación, que temos unhas **f.d.t. singulares**,

$$t_{bj} \approx |t_{bj}| e^{i\epsilon_j} \delta(x - x_j, y) \quad (56)$$

con $j = 1, 2$, $x_1 = -d/2$ e $x_2 = +d/2$, e onde pola presenza de elementos ópticos temos $|t_{bj}| e^{i\epsilon_j}$. Os coeficientes $|t_b|$ teñen unidades m^2 (no caso de fendas $|t_f|$ as teñen de m) por mor das deltas de Dirac, que ademais **seleccionan** os valores do campo incidente nos buratiños. En efecto, a **c.c.** en S_1 no plano $z=0$ entre o campo incidente e o campo emerxente é formalmente

$$\left\{ |t_{b1}| e^{i\epsilon_1} \delta\left(x + \frac{d}{2}, y\right) \right\} \frac{A_o}{L} e^{i\epsilon_S} e^{ik_o L} e^{ik_o \frac{x^2+y^2}{2L}} \mathbf{u} = \frac{A_{b1}}{-z_e} e^{-ik_o \frac{(x-x_e)^2 + (y-y_e)^2}{2z_e}} \mathbf{u}. \quad (57)$$

Logo só se $z_e \rightarrow 0$ e $x_e = -d/2$, $y_e = 0$ (*idem* para S_2 , i.e., $z_e \rightarrow 0$ e $x_e = +d/2$, $y_e = 0$), obtemos a delta de luz $A_{b1}(i\lambda_o) \delta(x + d/2, y)$, entón obtemos

$$A_{(b1)}^{(b2)} = |t_{(b1)}^{(b2)}| e^{i\epsilon_{(1)}^{(2)}} \frac{A_o e^{i\epsilon_S}}{(i\lambda_o)L} e^{i\{k_o L + k_o \frac{(\pm d/2)^2}{2L}\}} \quad (58)$$

como queriamos probar. Nótese o factor $(1/i\lambda_o)$ que con fendas é doado probar que sería $1/\sqrt{i\lambda_o}$.



■ **Superposición e interferencia.** Polo dito, dado o campo $\mathbf{E}_S(x, y, 0)$ da Ec. (53), incidente sobre o IY, o campo total emerxente do IY en $z=D$ é a suma de dúas ondas esféricas paraxiais de tamaño finito, dadas pola Ec. (54), e con f.d.a. dados pola Ec. (55), é dicir,

$$\mathcal{E}(x, y, D) = \frac{e^{i\epsilon_g} \mathbf{A}_o}{\lambda_o L} \frac{e^{ik_o D}}{D} \left\{ |t_{b1}| e^{i\epsilon_1} e^{ik_o \frac{(x+d/2)^2 + y^2}{2D}} + |t_{b2}| e^{i\epsilon_2} e^{ik_o \frac{(x-d/2)^2 + y^2}{2D}} \right\} \mathbf{u} \quad (59)$$

coa fase global total $\epsilon_g = \epsilon_S - \pi/2 + k_o d^2/8L + k_o L$. A **intensidade interferencial** obtense achando o módulo ao cuadrado do campo total, é dicir, $I = |\mathcal{E}|^2 = \mathcal{E}\mathcal{E}^*$, e obtemos as formas xeral e normal; se usamos as intensidades de cada onda,

$$I_1 = \mathbf{A}_o^2 |t_{b1}|^2 / \lambda_o^2 L^2 D^2, \quad I_2 = \mathbf{A}_o^2 |t_{b2}|^2 / \lambda_o^2 L^2 D^2 \quad (60)$$

entón

$$I(x, y, D) = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} (e^{-ik_o \frac{xd}{D}} e^{i\epsilon} + c.c.) = Q \left\{ 1 + \mathcal{V} \cos\left(k_o \frac{xd}{D} - \epsilon\right) \right\} \quad (61)$$

con $Q=I_1+I_2$ a intensidade total e $\mathcal{V}=2\sqrt{I_1 I_2}/(I_1+I_2)$ a visibilidade; $k_o xd/D$ é a **fase por propagación**, $\epsilon = \epsilon_2 - \epsilon_1$.

-Se $|t_{b1}| = |t_{b2}| = |t_b|$ entón $I_1=I_2=I_o=\mathbf{A}_o^2 |t_b|^2 / \lambda_o^2 L^2 D^2$, e obtemos (se non se indicase nada entón tomaríase $t_{b1}=t_{b2}=1$, logo $\epsilon=0$)

$$I(x, y, D) = 2I_o \left\{ 1 + \cos\left(-k_o \frac{xd}{D} + \epsilon\right) \right\} = 2I_o \left\{ 1 + \cos\left(k_o \frac{xd}{D} - \epsilon\right) \right\} \quad (62)$$

-**Obs.**-Sexa $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 = S_1 P - S_2 P = \sqrt{(x+d/2)^2 + y^2 + D^2} - \sqrt{(x-d/2)^2 + y^2 + D^2}$. Nótese que é unha **unha diferenza de camiño óptico** que dá $\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_2 \approx xd/D$ na aproximación paraxial (método C-O de cálculo de Φ).

2.1.3. ANÁLISE DO PADRÓN INTERFERENCIAL

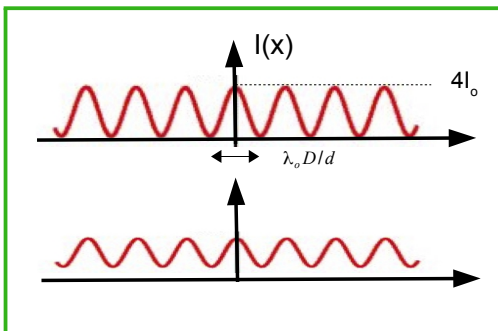
■ **Máximos e mínimos no IY.** Da expresión da intensidade interferencial (61) obtidas no baleiro obtemos as intensidades máximas e mínimas nos seguintes **puntos de fase e de camiño óptico**. Sexa, p.ex., $\epsilon=0$, entón $\Phi=k_o xd/D$, logo

$$\text{Max: } \Phi = 2m\pi \Rightarrow \Delta = \frac{\Phi}{k_o} = \frac{xd}{D} = m\lambda_o, m \in \mathbb{Z} \rightarrow I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2, \quad (63)$$

$$\text{Min: } \Phi = (2m+1)\pi \Rightarrow \Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_o, m \in \mathbb{Z} \rightarrow I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \quad (64)$$

Consecuentemente, os máximos e mínimos de intensidade óptica están nas seguintes **posicións**

$$X_m = m\lambda_o \frac{D}{d}, \quad x_m = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_o \frac{D}{d} \quad (65)$$



-Na Figura superior preséntase o caso $I_1=I_2=I_o$, onde $\mathcal{V}=1$, xa que $I_{\min}=0$; ademais obtense o valor máximo $I_{\max}=4I_o$.

-A inferior é o caso de intensidades distintas, onde os máximos baixan e os mínimos son distintos de cero, logo $\mathcal{V}<1$.

-Nótese que o máximo de orde $m = 0$ está en $x = 0$ para $\epsilon = 0$.



■ **Xeometría das franxas e interfranja no IY.** O lugar xeométrico de puntos coa mesma intensidade (por exemplo I_{\max}) son rectas paralelas ó eixo Y xa que $I=cte$ se $x=cte$ nun plano $z=D$ de observación, daquela

-A **Xeometría das franxas** é lineal, é dicir, o padrón interferencial é de franxas lineais.

-A **interfranja i** é a distancia entre mínimos consecutivos (ou entre máximos, pero presenta unha maior dificultade de medida), logo

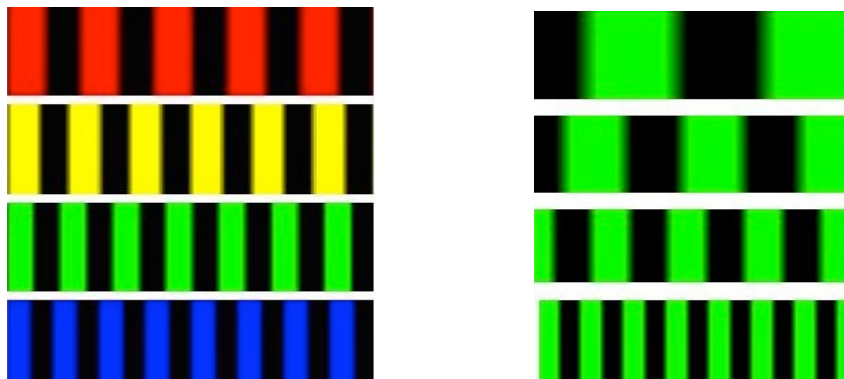
$$i = x_{m+1} - x_m = \left(m + 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_o D}{d} - \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_o D}{d} = \frac{\lambda_o D}{d} \quad (66)$$

-Observar a dependencia con $z=D$. Asemade, nótese que usando a Ec. (66) pódese determinar por medidas xeométricas da interfranja i_{exp} o valor da **lonxitude de onda** da luz que produce a interferencia (metroloxía/espectroscopía óptica), é dicir,

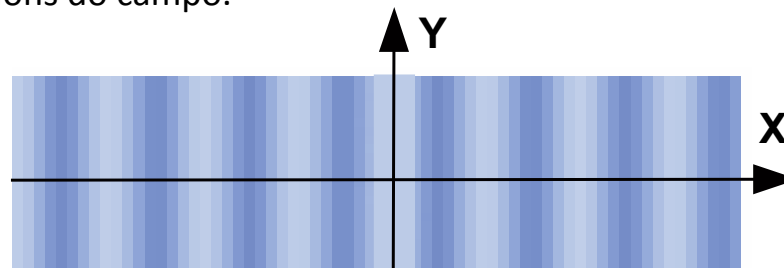
$$\lambda_o = i_{exp} \frac{d}{D} \quad (67)$$

-Na Figura de abaixo móstrase como aumenta a interfranja i con λ_o e a distancia de observación D (ou $1/d$) (medran cara arriba).

Obs.-Os padróns son “rectangulares” por facer uso de fendas con tamaño ou campo vertical finito, e en realidade a I decae transversalmente. (Ver ligazón <https://www.youtube.com/watch?v=9D8cPrEAGyc> sobre IY, no 1:45')



■ **Visibilidade ou Contraste.** Se $I_1 \neq I_2$, entón $\mathcal{V} = 2\sqrt{I_1 I_2} / (I_1 + I_2)$ (visibilidade coherente). Porén, coma xa foi comentado, experimentalmente pódese ter $\mathcal{V}_{exp} < \mathcal{V}$, e en particular $\mathcal{V}_{exp} < 1$ para $I_1 = I_2$, e que só podemos explicar en termos de incoherencia, é dicir, de fluctuacións do campo.



-Na Figura móstrase unha función de visibilidade $\mathcal{V}_{exp} < 1$ pero con $I_1 = I_2$, o que reflicte a presenza de fenómenos de incoherencia que formalizaremos máis adiante.

■ **Fases nos buratiños.** Un exemplo ilustrativo sería considerar unha lámina plano-paralela delgada de espesor d_o e índice n_o , p.ex., no buratiño 2, onde teríamos $\epsilon_2 = k_o n_o d_o$, e $\epsilon_1 = k_o d_o$ no buratiño 1, entón $\Phi = \varphi_2 - \varphi_1 + \epsilon_2 - \epsilon_{21} = -k_o \frac{xd}{D} + k_o (n_o - 1) d_o$, logo $I(0) \neq I_{\max}$

Exer.- 8 (*) Sexa un IY con dúas fendas paralelas ao eixo y sitas en $x=\pm d/2$. Achar a intensidade interferencial baixo as seguintes iluminacións de *l.d.o.* λ_o : onda plana z -paraxial de amplitude $E_o=1$; fonte de luz y -lineal (coherente) sita en $x=0, z=-L$; fonte puntual axial en $z=-L$; e fonte puntual desprazada en y , é dicir, en $(0, v, -L)$, todas con *f.d.a.* $A_o=1$. Supoñer que $t_{f1}=t_{f2}=1$.

Sol.-Neste caso o IY é de dúas fendas paralelas ao eixo y , logo emerxerán sempre dúas ondas y -cilíndricas, que salvo os factores de amplitude terán as seguintes expresións, no plano de observación $z = D$,

$$\mathcal{E}_{(1)} = A_{(f1)} \frac{e^{ik_o D}}{D^{1/2}} e^{ik_o \frac{(x \mp d/2)^2}{2D}} \mathbf{u}_{(1)}, \quad A_{(f1)} = \frac{1}{\sqrt{i\lambda_o}} E_S(\pm d/2, 0)$$

Daquela todo se reduce a achar ditos factores de amplitude segundo a onda incidente sobre o IY:

-Onda plana z -paraxial: neste caso $1 \cdot e^{ik_o z} \rightarrow A_{(f1)} = \frac{1}{\sqrt{i\lambda_o}} e^{ik_o 0} = \frac{1}{\sqrt{i\lambda_o}}$.

-Fonte y -lineal: temos unha onda y -cilíndrica (y -invariante) sita a unha distancia L das fendas, é dicir:

$$1 \cdot \frac{e^{ik_o L}}{L^{1/2}} e^{ik_o \frac{x^2}{2L}} \rightarrow A_{(f1)} = \frac{1}{\sqrt{i\lambda_o}} \frac{e^{ik_o L}}{L^{1/2}} e^{ik_o \frac{d^2}{8L}}$$

-Fonte puntual axial: neste caso temos unha onda esférica que alcanza as fendas, e que imos tratar como produto de dúas cilíndricas. A onda x -cilíndrica pasa “libremente” polas fendas, daquela formalmente

$$1 \cdot e^{ik_o L} \frac{1}{L^{1/2}} e^{ik_o \frac{x^2}{2L}} \frac{1}{L^{1/2}} e^{ik_o \frac{y^2}{2L}} \rightarrow A_{(f1)} = \frac{e^{ik_o L}}{\sqrt{i\lambda_o}} \frac{1}{L^{1/2}} e^{ik_o \frac{d^2}{8L}} \frac{1}{(L+D)^{1/2}} e^{ik_o \frac{y^2}{2(L+D)}}$$

é dicir, é como ter *f.d.a.* dependentes de y , inda que non afectarán á interferencia xa que é a mesma dependencia para as dúas ondas. De feito o factor con dependencia en y é unha onda cilíndrica que xa está escrita despois de propagarse unha distancia D .

-Fonte puntual desprazada: o desprazamento é na dirección y , logo factorizando de novo en cilíndricas obtemos

$$1 \cdot e^{ik_o L} \frac{1}{L^{1/2}} e^{ik_o \frac{x^2}{2L}} \frac{1}{L^{1/2}} e^{ik_o \frac{(y-v)^2}{2L}} \rightarrow A_{(f1)} = \frac{e^{ik_o L}}{\sqrt{i\lambda_o}} \frac{1}{L^{1/2}} e^{ik_o \frac{d^2}{8L}} \frac{1}{(L+D)^{1/2}} e^{ik_o \frac{(y-v)^2}{2(L+D)}}$$

-É doado ver que todas as **intensidades interferenciais** destes casos son iguais á Ec. (62), con $\epsilon=0$, salvo no prefactor I_o . En efecto, sempre obtemos

$$I = |\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2|^2 = 2I_o \left\{ 1 + \cos\left(k_o \frac{xd}{D}\right) \right\}$$

Onde para onda plana: $I_o=1/\lambda_o D$. Para fonte y -lineal $I_o=1/\lambda_o L D$. Para fonte puntual axial ou desprazada en y temos: $I_o=1/[\lambda_o L D (L+D)]$.



2.1.4. EXTENSIÓN Á INTERFERENCIA CUÁNTICA [C]

A interferencia de Young de partículas (electróns, neutróns, etc., e tamén fotóns) vén descrita pola mesma expresión que a obtida para ondas clásicas. A diferenza fundamental é que son ondas de amplitude de probabilidade as que interfieren (se ben no caso dos fotóns, é dicir, da luz, só podemos dicir que son **amplitudes de probabilidade de detección de luz, i.e., de interacción luz-materia** xa que a función de onda do fotón non está ben definida).

P.ex., tendo en conta a Ec. (54) podemos escribir as **ondas esféricas paraxiais electrónicas monoenergéticas** que emerxen dos buratiños, cando inciden, p.ex., electróns dunha fonte puntual con enerxía $E = \hbar\omega$ ($\omega = E/\hbar$), como

$$\Psi_{(2)}(x, y, z, t) = A_{(b_2)} \frac{e^{ik_B z}}{z} e^{ik_B \frac{(x \mp d/2)^2 + y^2}{2z}} e^{-i\omega t} \quad (68)$$

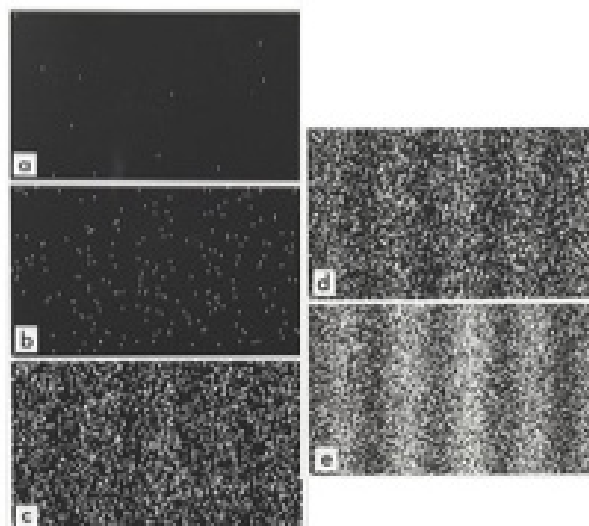
onde $k_B = 2\pi/\lambda_B = p/\hbar = \sqrt{2m_e E}/\hbar = n_e/\hbar$ é o **número de onda de De Broglie**, e λ_B a lonxitude de onda de De Broglie. Ademais en vez de polarización temos espín, é dicir, na representación vectorial temos \mathbf{u}_{s1} e \mathbf{u}_{s2} , pero obviámolo, i.e., supomos igual espín.

-Daquela a **función de probabilidade** da superposición das ondas electrónicas anteriores en $z = D$ vén dada, se $A_{b1} = A_{b2} = A_o$, pola expresión

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2 = |\Psi_1(\mathbf{r}) + \Psi_2(\mathbf{r})|^2 = 2A_o^2 [1 + \cos(k_B \frac{xd}{D})] \{\equiv I(\mathbf{r})\} \quad (69)$$

Obs.-Para partículas (non relativistas) $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_1(\mathbf{r}) + \Psi_2(\mathbf{r})$ é unha amplitude de probabilidade de atopar a partícula no punto \mathbf{r} . Para un fotón (partícula relativista) é proporcional a unha amplitude de probabilidade de detectar (interacción fotón-materia) o fotón no punto \mathbf{r} , xa que se proba que dita amplitude é proporcional ao campo óptico, pero non é a función de onda do fotón.

-**Exemplo** numérico: se temos electróns de enerxía $E = 10^3 eV$, entón temos unha lonxitude de onda $\lambda_B = 2\pi/k_B = h/\sqrt{2m_e E} \approx 1.2$ nm. Daquela, se $D = 1$ m, $d = 200$ nm, prodúcese unha interfranja $i = 6$ mm. Con isto podemos **medir a λ_B** e daquela a **enerxía E**.



-Na Figura móstrase a interferencia en distintos tempos (detección acumulativa). Nótese a aleatoriedade do **colapso** da función de onda, e ademais, como se vai “reconstruindo” a **función de probabilidade $\mathcal{P}(\mathbf{r})$** .

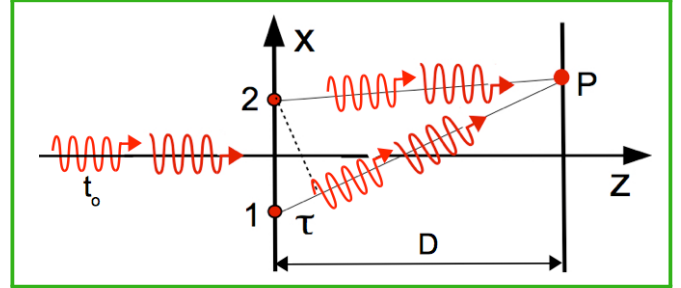
2.2. INTERFERENCIA YOUNG E COHERENCIA TEMPORAL.

■ **IY con pulsos ópticos.** Consideremos un campo parcialmente coherente temporalmente iluminando un IY. En particular **pulsos z-planos** de duración t_o . Lembremos que a intensidade interferencial é

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = \langle \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_1 \rangle + \langle \mathbf{E}_2^* \mathbf{E}_2 \rangle + \langle \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 \rangle + \langle \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1^* \rangle \quad (70)$$

Neste caso \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 son os campos $\mathbf{E}_{(1)}$ e $\mathbf{E}_{(2)}$ en dous puntos temporais cun **retardo τ producido polo IY**,

$$\tau = \Delta/c = xd/cD \quad (71)$$



Os puntos \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 son os buratiños do IY, logo, en $z=0$, $\Delta L_o \equiv \Delta_o = 0$ (pulso esférico axial, cilíndrico axial, plano, ...).

Formalmente, para pulsos (p.ex. rectangulares) planos de amplitude E_o , $I_j = E_o^2 |t_{bj}| / \lambda_o^2 D^2$, $j=1, 2$, logo

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}) \rangle &= I_1 + I_2 + \{ \sqrt{I_1 I_2} \langle e^{-i\gamma(t)} e^{i\gamma(t+\tau)} e^{-ik_o \frac{xd}{D}} \rangle + \text{c.c.} \} = \\ &= I_1 + I_2 + \{ \sqrt{I_1 I_2} \langle e^{i\gamma_a(\tau)} \rangle e^{-i\omega\tau} + \text{c.c.} \} \end{aligned} \quad (72)$$

onde $\gamma_a(\tau) = \gamma(t+\tau) - \gamma(t) \equiv \gamma(t') - \gamma(t' - \tau)$. Nótese que o pulso 1 inviste un tempo “adicional” τ respecto ao pulso 2. Ademais o valor de $\gamma_a(\tau)$ depende de τ , i.e., do punto x de observación como segue: se $\tau < t_o$, $\langle e^{i\gamma_a(\tau)} \rangle \neq 0$, se $\tau > t_o$, $\langle e^{i\gamma_a(\tau)} \rangle = 0$ (lembrar **Exer.-6**).

Tendo en conta a expresión $\langle e^{i\gamma_a(\tau)} \rangle = |\langle e^{i\gamma_a(\tau)} \rangle| e^{i\alpha(\tau)}$, reescribimos a Ec. (72) en forma normal,

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = (I_1 + I_2) \left\{ 1 + \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\langle e^{i\gamma_a(\tau)} \rangle| \cos(\alpha - \omega\tau) \right\} \quad (73)$$

-No caso de pulsos rectangulares de duración t_o (**Exer.-6**) obtívose $\langle e^{i\gamma_a(\tau)} \rangle = (1 - \tau/t_o) = (1 - xd/cDt_o) \forall \tau < t_o$ entón $\alpha=0$. Nótese que $\mathcal{V} = [2\sqrt{I_1 I_2} / (I_1 + I_2)] |\langle e^{i\gamma_a(\tau)} \rangle|$ depende do **punto x (retardo)** considerado no plano de observación, e **diminuindo gradualmente** (verase en interferencia policromática). *Obs.-O modelo de fluctuación de γ_a pode ser moito máis xeral có visto no Exer.-6.*

■ **Implementación da f.d.c.-** Da ecuación xeral (20) para $g_{(1)}$, e das Ecs. (70) e (72), vese que o **IY implementa a función de coherencia óptica (temporal) normalizada**, é dicir,

$$g_{(1)}(\tau) = \langle \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 \rangle / \sqrt{I_1 I_2} = \langle e^{i\gamma_a(\tau)} \rangle e^{-i\omega\tau} = |\langle e^{i\gamma_a(\tau)} \rangle| e^{i\alpha(\tau)} e^{-i\omega\tau} \quad (74)$$

-**Daquela**, o grao de coherencia pódese **medir coa visibilidade** que contén dous factores: un de orixe incoherente (ou grao de coherencia) e outro coherente,

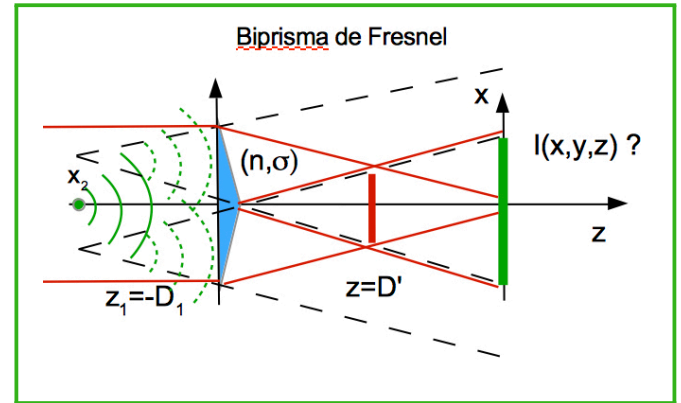
$$\mathcal{V} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \cdot |\langle e^{i\gamma_a(\tau)} \rangle| = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \cdot |g_{(1)}| = \nu_o \cdot |g_{(1)}| \quad (75)$$

-Nótese que salvo $\nu_o = 2\sqrt{I_1 I_2} / (I_1 + I_2)$, \mathcal{V} dá o grao de coherencia. Se $I_1 = I_2 = I_o$ (buratiños iguais) entón $\mathcal{V} = |g_{(1)}|$, e ademais $|g_{(1)}| \cos(\alpha - \omega\tau) = \Re(g_{(1)})$.

2.3. OUTROS INTERFERÓMETROS TIPO YOUNG

Exer.- 9 Sexa un **Biprisma de Fresnel (BF)** de espesor d_o no centro, tal e como se indica na Figura (útil para introducir elementos ópticos no interferómetro).

9.1.-Achar a intensidade interferencial en calquera plano $z=D'$ cando iluminamos o BF cunha **onda plana** normalmente incidente de amplitude E_o e polarización \mathbf{u}_y . *Idem* se no prisma superior colocamos un polarizador lineal co eixo de transmisión a θ graos co eixo y . ¿Que pasaría se invertimos os prismas? 9.2.-*Idem* se iluminamos cunha **fonte puntual** con f.d.a. A_o sita en $(0, 0, -D_1)$, probar que temos un IY con $d/2 = \sigma(n - 1)D_1$, e $D = D_1 + D'$.



Sol.9.1.-Escribimos as **expresións das ondas planas** transmitidas de acordo co que sabemos de c.c. en prismas, é dicir, as **ondas inferior (1) e superior (2)** son, respectivamente,

$$\mathbf{E}_1 = t e^{ik_o n d_o} \mathbf{E}_o e^{ik_o[(n-1)\sigma x + z]} e^{-i\omega t} \mathbf{u}_y, \quad \mathbf{E}_2 = t e^{ik_o n d_o} \mathbf{E}_o e^{ik_o[-(n-1)\sigma x + z]} e^{-i\omega t} \mathbf{u}_y$$

onde $t=t_1 t_2$. As **direccións** das ondas son $\mathbf{k}_1 \approx k_o((n-1)\sigma, 0, 1)$ e $\mathbf{k}_2 \approx k_o(-(n-1)\sigma, 0, 1)$. Calculando a intensidade $I = |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2 = \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2^* \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^*$, obtemos

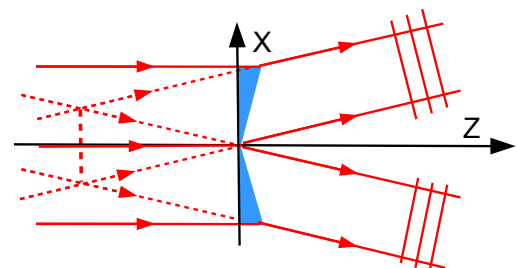
$$I = 2t^2 E_o^2 + t^2 E_o^2 e^{-2ik_o(n-1)\sigma x} + t^2 E_o^2 e^{2ik_o(n-1)\sigma x} = 2t^2 E_o^2 \{1 + \cos[2k_o(n-1)\sigma x]\}$$

Se consideramos o **polarizador** temos o vector $\mathbf{u}_2 = \sin \theta \mathbf{u}_x + \cos \theta \mathbf{u}_y$ de polarización do campo superior, i.e.,

$$\mathbf{E}_2 = t e^{ik_o n d_o} \mathbf{E}_o e^{ik_o[-(n-1)\sigma x]} e^{-i\omega t} \cos \theta (\sin \theta \mathbf{u}_x + \cos \theta \mathbf{u}_y), \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} I &= (t^2 E_o^2 + t^2 E_o^2 \cos^2 \theta) + t^2 E_o^2 \cos \theta \mathbf{u}_y^* \mathbf{u}_2 e^{-2ik_o(n-1)\sigma x} + t^2 E_o^2 \cos \theta \mathbf{u}_y \mathbf{u}_2^* e^{2ik_o(n-1)\sigma x} = \\ &= \{ \mathbf{u}_y^* \mathbf{u}_2 = \cos \theta \} = t^2 E_o^2 (1 + \cos^2 \theta) \left\{ 1 + \frac{2 \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \cos[2k_o(n-1)\sigma x] \right\} \end{aligned}$$

-Se **invertimos os prismas**, as ondas superior e inferior refráctanse alonxándose do eixo z (ver Figura). Logo non hai superposición real despois do prisma. Porén, a prolongación das ondas planas refractadas cara atrás si se superpoñen de forma virtual.



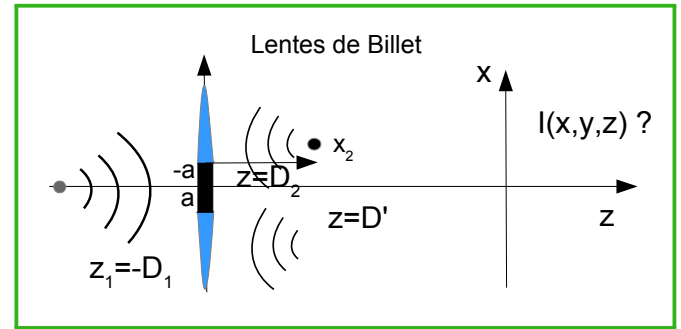
-Polo tanto temos o que se denomina **interferencia virtual e non localizada** (por estar nunha **rexión 3D**), a diferenza do caso anterior que era **interferencia real e non localizada**. A expresión da $I(\mathbf{r})$ é a mesma pero sita virtualmente en $z < 0$.

-**Interferencia localizada:** corresponde ao caso onde o padrón está localizado nun subespazo: superficie, plano, liña, ...)

Sol.9.2.-Lembrando que $z_2 = z_1$ e $x_2 = -\sigma(n-1)z_1$ é inmediato probar que temos un IY con con parámetros $d/2 = \sigma(n-1)D_1$, e $D = D_1 + D'$

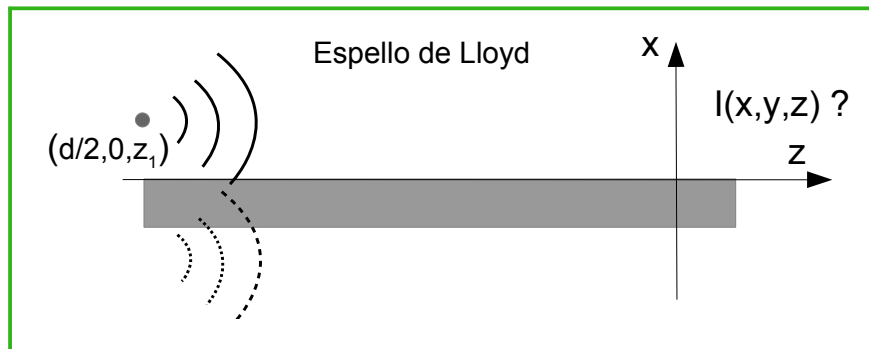


Exer.- 10 [C] Sexan **dúas Lentes de Billet** (dúas semi-lentes, obtidas a partir do corte dunha lente, p.ex., polo plano $x=0$, e separadas $2a$). Achar a intensidade interferencial en calquera plano z cando iluminamos as lentes cunha **onda plana** normalmente incidente de amplitude E_o . *Idem* se as iluminamos cunha **fonte puntual** sita en $(0, 0, -D_1)$. Probar que temos un IY con $d/2 = a[1 + f/(D_1 - f)]$, e $D = D' - z_2$.



Sol.-Para achar a solución, téñase en conta que $z_2 = z_1 f / (z_1 + f)$, e $x_2 = (z_2 / z_1) x_1$, con $x_1 = \mp a$, e $D_1 > f$.

Exer.- 11 [C] Sexa un **Espello de Lloyd** (as ondas que interfíren son a directa e a reflectida). Achar a intensidade interferencial z -paraxial en calquera plano z cando usamos unha fonte esférica z -paraxial principal de frecuencia ω e amplitude A_o sita no punto $(d/2, 0, z_1)$.



Sol.-A onda z -paraxial de factor de amplitude A_o e emerxendo de $(d/2, 0, z_1)$ (onda incidente) ten a seguinte expresión

$$\mathcal{E}_i(x, y, z_1) = \frac{A_o}{(z - z_1)} e^{ik_o \frac{(x-d/2)^2 + y^2}{2(z-z_1)}} e^{ik_o z}$$

A onda reflectida procede, como sabemos segundo a lei de especularidade ou as c.c., dun punto virtual sito en $(-d/2, 0, z_1)$. Daquela, a expresión da onda é

$$\mathcal{E}_r(x, y, z_1) = \frac{A_o e^{i\pi}}{(z - z_1)} e^{ik_o \frac{(x+d/2)^2 + y^2}{2(z-z_1)}} e^{ik_o z}$$

onde $e^{i\pi}$ é o coeficiente de Fresnel do espello. Logo é equivalente a un IY con un buratiño real e outro virtual en $\pm d/2$ e con $(z - z_1) \equiv D$, p.ex., $z_1 = -L$, entón a intensidade interferencial é $I = |\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_r|^2$, é dicir

$$I(x, z) = 2I_o \left\{ 1 - \cos\left(\frac{k_o x d}{z + L}\right) \right\}$$

con $I_o = A_o^2 / (z + L)^2$. Nótese o mínimo en $x=0$ debido ao salto de fase π no espello.

Exer.- 12 (*) Sexa un IY iluminado cunha onda plana de amplitude E_0 e l.d.o. λ_0 . A separación entre os dous buratiños con transmisión t_b e simetricamente situados ó longo do eixo x , é igual a a_0 . 12.1.-A unha distancia $D_1 = 5f$ á dereita do plano dos buratiños colocamos unha lente delgada de focal $f > 0$, espesor d_0 e índice n , entón achar a expresión da intensidade luminosa do padrón interferencial a unha distancia D_2 da lente. 12.2.-Achar qué valor debe ter D_1 ($z_1 = -D_1$) para que a interfranxa interferencial sexa independente da distancia $z = D_2$, e escribi-la expresión da intensidade interferencial.

Sol.-12.1.-A expresións das ondas esféricas emerxentes dos buratiños (e antes da lente) veñen dadas por

$$\mathcal{E}_{(1)}(x, y, z) = \frac{t_b E_0 e^{ik_0 5f}}{i \lambda_0 z} e^{ik_0 z} e^{ik_0 \frac{(x \mp a_0/2)^2 + y^2}{2z}}$$

(Obs.-O factor $i \lambda_0$ procede dos buratiños, e derivado na sección 2.2, e que xunto con t_b fai que teñamos unidades de campo óptico). Para obter as ondas emerxentes da lente aplicamos c.d.c. coa FdT da lente delgada (ver Exer.-12 Tema 1, con $t_1 t_2 \approx 1$),

$$\left\{ e^{ik_0 n d} e^{-ik_0 \frac{(x^2 + y^2)}{2f}} \right\} \frac{t_b E_0}{i \lambda_0 5f} e^{ik_0 5f} e^{ik_0 \frac{(x \mp a_0/2)^2 + y^2}{2(5f)}} = \mathcal{E}_{L(1)}(x, y, 0) = \frac{A_{02}}{-z_2} e^{ik_0 \frac{(x \mp x_2)^2 + y^2}{-2z_2}}$$

con z_2 respecto ao SR no plano da lente; resolvendo coma sempre a c.d.c obtemos os seguintes parámetros da onda despois da lente

$$z_2 = \frac{5f}{4} \text{ e } x_2 = -\frac{1}{4} x_1 = -\frac{1}{4} \frac{a_0}{2} = -\frac{a_0}{8} \text{ (aumento } m = -\frac{1}{4}), \quad A_{02} = -\frac{t_b E_0}{i \lambda_0 4} e^{ik_0 5f} e^{ik_0 \frac{a_0^2}{32f}}$$

logo as expresións dos campo ópticos das ondas emerxentes (converxentes) respecto ao plano da lente son

$$\mathcal{E}_{L(1)}(x, y, z) = -\frac{1}{4} \frac{t_b E_0 e^{ik_0 5f} e^{ik_0 \frac{a_0^2}{32f}}}{i \lambda_0 (z - 5f/4)} e^{ik_0 z} e^{ik_0 \frac{(x \pm a_0/8)^2 + y^2}{2(z - 5f/4)}}$$

Hai unha inversión dos puntos non relevante. Polo tanto podemos achar a intensidade interferencial no plano $z = D_2 > 5f/4$ (nótese que temos un IY efectivo con $d = a_0/4$ e $D = D_2 - 5f/4$), é dicir,

$$I(x, D) = \frac{t_b^2 E_0^2}{8 \lambda_0^2 (D_2 - 5f/4)^2} \left\{ 1 + \cos \left[k_0 \frac{a_0 x}{4(D_2 - 5f/4)} \right] \right\}$$

Sol.-12.2.-O valor de D_1 para obter unha interfranxa independente de z (D_2) debe ser tal que o que interfira sexan ondas planas. Polo tanto

$$\left\{ e^{ik_0 n d} e^{-ik_0 \frac{(x^2 + y^2)}{2f}} \right\} \frac{t_b E_0 e^{-ik_0 z_1}}{i \lambda_0 (-z_1)} e^{ik_0 \frac{(x \mp a_0/2)^2 + y^2}{-2z_1}} = \{ \text{se } z_1 = -f \} = \frac{t_b E_0 e^{ik_0 n d} e^{ik_0 f} e^{ik_0 \frac{a_0^2}{8f}}}{i \lambda_0 f} e^{ik_0 (\mp \frac{a_0}{2f}) x}$$

logo emerxen ondas planas con vectores de onda $k_0(a_0/2f, 0, 1)$ e $k_0(-a_0/2f, 0, 1)$, (ver Exer.14 Tema 1). A intensidade interferencial é, como xa se fixo no Exer. 7,

$$I(x) = \frac{2t_b^2 E_0^2}{\lambda_0^2 f^2} \left\{ 1 + \cos \left[k_0 \frac{a_0 x}{f} \right] \right\}$$

que é un padrón z -invariante. Nótese que neste caso a focal f determina, xunto coa separación a_0 , as dimensións da interfranxa.



2.4. INTERFERENCIA E POLARIZACIÓN

Nos buratiños do IY, ou mesmo mellor, nos prismas, lentes de Billet, etc., podemos situar **elementos polarizantes e retardadores**, polo que teremos unha interferencia na que hai que ter en conta a estrutura vectorial do campo.

Exer.- 13 (*) [C] Sexa un IY con fendas paralelas ó eixo y , separadas unha distancia d e con transmisión t_f . En cada fenda hai un polarizador lineal cos eixos de transmisión a α e β graos con respecto ó eixo x . A fonte lineal primaria coherente emite LN de frecuencia central ω , con $A_o=1$, é paralela ó eixo y e está centrada no eixo z a unha distancia L do plano das fendas. 13.1.-Acha-la expresión da intensidade interferencial a unha distancia $z = D$ do IY. 13.2.-*Idem* se a fonte emite luz polarizada lineal vertical.

Sol.-13.1.-A onda emerxente da fonte lineal de LN podemos representala vectorialmente en $z=0$ como

$$\mathcal{E}_s = \frac{1 \cdot e^{i\epsilon_s} e^{ik_o L}}{L^{1/2}} e^{ik_o \frac{x^2}{2L}} (\cos \gamma_a \mathbf{u}_x + \sin \gamma_a \mathbf{u}_y) = \frac{1 \cdot e^{i\epsilon_s} e^{ik_o L}}{L^{1/2}} e^{ik_o \frac{x^2}{2L}} \mathbf{u}_{\gamma_a}$$

con γ_a aleatorio. En $z=0$ temos as fendas e os polarizadores que dan lugar aos seguintes campos

$$\mathcal{E}_{(1)} = \frac{E_o t_f e^{ik_o D}}{(i\lambda_o D)^{1/2}} e^{ik_o \frac{(x \mp d/2)^2}{2D}} (\mathbf{u}_{\gamma_a} \mathbf{u}_{(\beta)}^{\alpha}) \mathbf{u}_{(\beta)}^{\alpha}$$

onde $E_o = e^{i\epsilon_s} (1/L^{1/2}) e^{ik_o L} e^{-ik_o d^2/8L}$. Calculando e promediando estatisticamente obtemos a intensidade interferencial,

$$\begin{aligned} I(x, D) &= \langle I(x, D, \gamma_a) \rangle_{\gamma_a} = 2I_o \{1 + \cos(\alpha - \beta) \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\beta \cos(k_o x d / D)\} = \\ &= \langle I(x, D, \gamma_a) \rangle_{\gamma_a} = 2I_o \{1 + \cos^2(\alpha - \beta) \cos(k_o x d / D)\} \end{aligned}$$

onde $I_o = t_f^2 / (2\lambda_o L D)$. Asemade, $\mathcal{V} = \cos^2(\alpha - \beta)$, logo nula para polarización ortogonal, e máxima para polarización paralela.

Sol.-13.2.-Se a fonte emite luz polarizada vertical, podemos formalmente facer a substitución $\mathbf{u}_{\gamma_a} \equiv \mathbf{u}_y$, e daquela

$$\mathcal{E}_{(1)} = \frac{E_o t_f e^{ik_o D}}{(i\lambda_o D)^{1/2}} e^{ik_o \frac{(x \mp d/2)^2}{2D}} (\mathbf{u}_y \mathbf{u}_{(\beta)}^{\alpha}) \mathbf{u}_{(\beta)}^{\alpha} = \frac{E_o t_f e^{ik_o D}}{(i\lambda_o D)^{1/2}} e^{ik_o \frac{(x \mp d/2)^2}{2D}} \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \mathbf{u}_{(\beta)}^{\alpha}$$

logo

$$\begin{aligned} I(x, D) &= 2I_o \{ \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\beta \cos(k_o x d / D) \} = \\ &= 2I_o \{ \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta) \cos(k_o x d / D) \} \end{aligned}$$

A visibilidade é

$$\mathcal{V} = \frac{2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$$

Se $\alpha = \beta$ obtemos $\mathcal{V} = 1$. Se α ou β son nulos, non hai interferencia. Se $\alpha = \beta + \pi/2$ tam pouco hai interferencia, etc.

-**Outra posible representación da LN** de intensidade unidade é $\mathbf{E} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{u}_x + e^{i\gamma_a} \mathbf{u}_y)$.

Fágase de novo o Exercicio con esta outra representación da LN.



Exer.- 14 (*) [C] Sexa un IY iluminado normalmente cun feixe plano de luz natural de intensidade unidade e *l.d.o.* λ_o . As fendas do IY paralelas ao eixo γ , sitas no plano $z = 0$, e simétricamente situadas no eixo x , están separadas d e teñen transmisión t_f . Nun dos buratiños colocamos un polarizador co seu eixo de transmisión a α graos co eixo x . Acha-la expresión da intensidade interferencial en $z = D$, e determinar \mathcal{V} . Supoñer que a fase debida ao espesor do polarizador sito nun buratiño está compensada no outro buratiño.

Sol.-Neste caso, unha das ondas emerxe dun polarizador, e a outra simplemente atravesada a fenda,

$$\mathcal{E}_1(x, z) = \frac{t_f}{(i\lambda_o D)^{1/2}} e^{ik_o D} e^{ik_o \frac{(x+d/2)^2}{2D}} (\cos \alpha \cos \gamma_a + \text{sen } \alpha \text{ sen } \gamma_a) (\cos \alpha \mathbf{u}_x + \text{sen } \alpha \mathbf{u}_y)$$

$$\mathcal{E}_2(x, z) = \frac{t_f}{(i\lambda_o D)^{1/2}} e^{ik_o D} e^{ik_o \frac{(x-d/2)^2}{2D}} (\cos \gamma_a \mathbf{u}_x + \text{sen } \gamma_a \mathbf{u}_y)$$

Por ortogonalidade a intensidade total é a suma de intensidades interferenciais en cada dirección ortogonal, é dicir,

$$I = I_x + I_y = |\mathcal{E}_{1x} + \mathcal{E}_{2x}|^2 + |\mathcal{E}_{1y} + \mathcal{E}_{2y}|^2$$

Comezamos coa I_x ,

$$I_x(x, z) = (t_f^2/\lambda_o D) \{ \langle (\cos \alpha \cos \gamma_a + \text{sen } \alpha \text{ sen } \gamma_a)^2 \rangle \cos^2 \alpha + \langle \cos^2 \gamma_a \rangle + 2 \langle (\cos \alpha \cos \gamma_a + \text{sen } \alpha \text{ sen } \gamma_a) \cos \gamma_a \rangle \cos \alpha \cos(k_o x d / D) \}$$

logo

$$I_x(x, z) = \frac{t_f^2}{\lambda_o D} \left\{ \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} + \cos^2 \alpha \cos(k_o x d / D) \right\}$$

Para I_y temos

$$I_y(x, z) = (t_f^2/\lambda_o D) \{ \langle (\cos \alpha \cos \gamma_a + \text{sen } \alpha \text{ sen } \gamma_a)^2 \rangle \text{sen}^2 \alpha + \langle \text{sen}^2 \gamma_a \rangle + 2 \langle (\cos \alpha \cos \gamma_a + \text{sen } \alpha \text{ sen } \gamma_a) \text{sen } \gamma_a \rangle \text{sen } \alpha \cos(k_o x d / D) \}$$

logo é inmediato ver que obtemos o mesmo resultado que para $I_x(x, z)$ pero co cambio $(\cos^2 \alpha) \rightarrow (\text{sen}^2 \alpha)$.

A intensidade interferencial total vén dada pola suma de intensidades I_x e I_y , logo obtemos

$$I = \frac{t_f^2}{\lambda_o D} \left\{ \frac{1}{2} + 1 + \cos(k_o x d / D) \right\} = \frac{3t_f^2}{2\lambda_o D} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \cos(k_o x d / D) \right\}$$

-O exercicio pódese tamén resolver usando a base \mathbf{u}_α e $\mathbf{u}_{\alpha\perp}$, é dicir, a LN tería (dada a súa invarianza rotacional) o vector unitario aleatorio $(\cos \gamma_a \mathbf{u}_\alpha + \text{sen } \gamma_a \mathbf{u}_{\alpha\perp})$, o que simplifica enormemente o cálculo (Exer).

Exer.- 15 [C] Un IY é iluminado cun feixe plano de LN case-monocromático de lonxitude de onda λ_o e intensidade unidade. Deducir, usando intensidades interferenciais, que lámina retardadora que desfasa ϵ a compoñente y , sita no buratiño 1 (os dous con transmisión t_b), eliminaría o padrón interferencial producido polo IY. *Obs.*-Tendo en conta como funciona unha lámina retardadora habería unha fase adicional $\epsilon = k_o(n_x - 1)d_o$, con n_x o índice x -principal do retardador de espesor d_o que non cambia a solución do exercicio.

Sol.-Os campos emerxentes dos buratiños, co retardador, p.ex., no buratiño 1, veñen dados polas seguintes expresións

$$\mathcal{E}_{(1)}(x, z) = \frac{1 \cdot t_b}{i\lambda_o D} e^{ik_o \frac{(x \mp d/2)^2 + y^2}{2D}} e^{ik_o D} (\cos \gamma_a \mathbf{u}_x + e^{i(\epsilon)} \sin \gamma_a \mathbf{u}_y)$$

Para fixar ideas supuxemos que o sistema de referencia principal (SRP) da lámina é o xy , pero o resultado é independente se fose calquera outro SRP $\xi\gamma$ rotado. A intensidade interferencial obtense usando $I = I_x + I_y$ e os promedios estatísticos $\cos^2 \gamma_a = \sin^2 \gamma_a = 1/2$, logo

$$I(x, z) = I_x + I_y = \frac{1}{2} \frac{2t_b^2}{\lambda_o^2 D^2} \{1 + \cos(k_o \frac{xd}{D})\} + \frac{1}{2} \frac{2t_b^2}{\lambda_o^2 D^2} \{1 + \cos(k_o \frac{xd}{D} + \epsilon)\}$$

Se agora introducimos unha lámina $\lambda/2$ ($\epsilon = \pi$), é inmediato comprobar que desaparece a interferencia. Logo unha lámina modifica en xeral a \mathcal{V} do padrón interferencial, a pesares de usar LN, é dicir, luz despolarizada.

■ **Técnica XYH para dous padróns.** Imos obter a **forma normal** para o caso de dous padróns interferenciais (p.ex., coa polarización pode aparecer un padrón para TE e outra para TM, etc.), é dicir,

$$I(x, z) = 2I_o(1 + \cos \Phi) + 2I_o(1 + \cos(\Phi + \epsilon)) = 4I_o + I_o \{ \cos \Phi + \cos \epsilon \cos \Phi - \sin \epsilon \sin \Phi \} = 4I_o + 2I_o \{ (1 + \cos \epsilon) \cos \Phi - \sin \epsilon \sin \Phi \}$$

(se $2I_o = t_b^2 / \lambda_o^2 D^2$ e $\Phi = k_o xd / D$, estamos no caso do Exer.-15). Se multiplicamos e dividimos o 2º sumando por $H = I_o \sqrt{(1 + \cos \epsilon)^2 + \sin^2 \epsilon}$ (raíz cuadrada da suma dos cuadrados dos coeficientes de $\cos \Phi$ e $\sin \Phi$), e denotando agora $X = I_o(1 + \cos \epsilon)$ e $Y = I_o \sin \epsilon$, podemos definir os seguintes cos e sen abstractos (que chamaremos técnica XYH)

$$\cos \alpha = \frac{X}{H}, \quad \sin \alpha = \frac{Y}{H}$$

reescribimos a I interferencial como:

$$I(x, z) = 2I_o + H \left\{ \frac{X}{H} \cos \Phi - \frac{Y}{H} \sin \Phi \right\} = 2I_o + H \{ \cos \alpha \cos \Phi - \sin \alpha \sin \Phi \} = 2I_o \left\{ 1 + \frac{H}{2I_o} \cos(\Phi + \alpha) \right\} = 2I_o \left\{ 1 + \frac{\sqrt{(1 + \cos \epsilon)^2 + \sin^2 \epsilon}}{2} \cos(k_o \frac{xd}{D} + \alpha) \right\}$$

onde simplificando $\mathcal{V} = \sqrt{2 + 2 \cos \epsilon} / 2 = \sqrt{4 \cos^2(\epsilon/2)} / 2$, obtemos a visibilidade (grao de coherencia)

$$\mathcal{V} = |\cos(\epsilon/2)|$$

É obvio que se $\epsilon = \pi$ desaparece a interferencia, é dicir, $\mathcal{V} = 0$. O procedemento se podería xeralizar á suma de varios padróns.

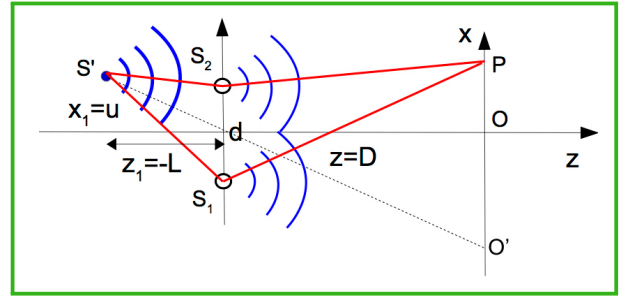


2.5. EFECTO DA TRASLACIÓN DA FONTE PRINCIPAL

2.5.1. ESTUDO INTERFERENCIAL CASE-ONDULATORIO [C]

Trasladamos a fonte principal dun IY até o punto $S' \equiv (u, 0, -L)$ e imos achar de xeito C-O a intensidade interferencial.

A aproximación paraxial da fonte primaria require que se cumpra $u \ll L$. Neste caso os camiños da fonte principal aos buratiños é diferente xa que hai novos camiños $S'S_2$ e $S'S_1$. Polo tanto, a nova diferenza de camiño óptico paraxial vén dada pola seguinte expresión



$$\Delta' = (S'S_2 + S_2P) - (S'S_1 + S_1P) = (S'S_2 - S'S_1) + (S_2P - S_1P) = \Delta_u + \Delta \approx \approx [(u - d/2)^2 + L^2]^{1/2} - [(u + d/2)^2 + L^2]^{1/2} - xd/D \approx -ud/L - xd/D \quad (76)$$

logo

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k_o \frac{xd}{D} + k_o \frac{ud}{L}) = \{I_2 = I_o\} = 2I_o [1 + \cos(k_o \frac{xd}{D} + k_o \frac{ud}{L})] \quad (77)$$

onde $I_i = A_o^2 |t_i|^2 / \lambda_o^2 L^2 D^2$, $i=1, 2$. Obsérvase que o **padrón interferencial desprazouse** unha cantidade $x_o = -Du/L$ (punto O' na Figura), que é onde está a agora o máximo principal (ou central).

2.5.2. ESTUDO INTERFERENCIAL ONDULATORIO

■ **Intensidade interferencial.** Comezamos achando a amplitude da **onda esférica incidente** nos puntos dos buratiños, con $t_{b1} = t_{b2} = 1$, de onde saen dúas ondas esféricas, é dicir,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(1)} &= \frac{1}{i\lambda_o} \left\{ \frac{A_o e^{i\epsilon_s} e^{ik_o L}}{L} e^{ik_o \frac{[(\pm \frac{d}{2} - u)^2 + (y=0-v=0)^2]}{2L}} \right\} \frac{e^{ik_o D}}{D} e^{ik_o \frac{[(x \mp \frac{d}{2})^2 + y^2]}{2D}} \mathbf{u}_y = \\ &= \frac{A_o}{i\lambda_o L D} e^{i\epsilon_s} e^{ik_o (L+D + \frac{d^2}{8L} + \frac{u^2}{2L} + \frac{(x^2+y^2)}{2D} + \frac{d^2}{8D})} (e^{\mp ik_o \frac{du}{2L}} e^{\mp ik_o \frac{xd}{2D}}) \quad (78) \end{aligned}$$

Daquela, sumando os campos $\mathcal{E}_{(1)}$ e achando a intensidade interferencial obtense:

$$I = \frac{A_o^2}{\lambda_o^2 L^2 D^2} \{2 + (e^{-ik_o \frac{xd}{D}} e^{-ik_o \frac{du}{L}} + c.c.)\} = \frac{2A_o^2}{\lambda_o^2 L^2 D^2} \{1 + \cos(k_o \frac{xd}{D} + k_o \frac{ud}{L})\} \quad (79)$$

-Se o punto luminoso estivese en $(0, v, -L)$, é inmediato ver que non pasaría nada xa que a nova fase $\exp\{ik_o v^2/2L\}$ sería a mesma para as dúas ondas no plano dos buratiños.

■ **Análise do padrón interferencial** As posicións dos máximos e mínimos tamén estarán desprazadas unha cantidade x_o , é dicir,

$$\text{Máx. } \Phi = 2m\pi \Rightarrow \frac{xd}{D} + \frac{ud}{L} = m\lambda_o, \quad X_m = m\lambda_o \frac{D}{d} - \frac{Du}{L} \quad (80)$$

$$\text{Mín. } \Phi = (2m+1)\pi \Rightarrow \frac{xd}{D} + \frac{ud}{L} = (m+1/2)\lambda_o, \quad x_m = (2m+1)\lambda_o \frac{D}{2d} - \frac{Du}{L} \quad (81)$$

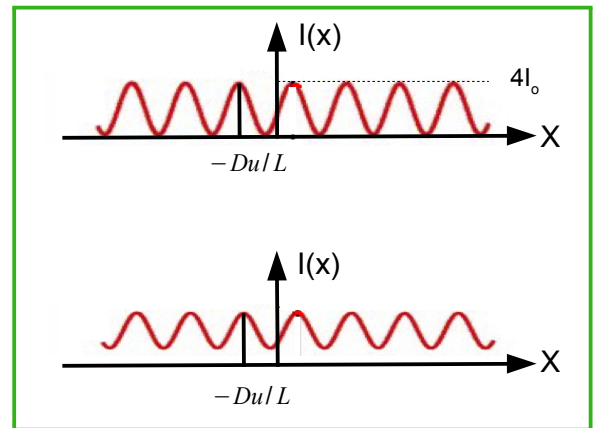
Nótese que o máximo central ($m=0$) desprazouse até $O' \equiv (-Du/L, 0, D)$, e subtende o mesmo ángulo que a fonte puntual, é dicir, $X_o = -Du/L$ ($X_o < 0$), logo $X_o/D = -u/L$.



-**Análise gráfico.**-Na figura móstrase a intensidade interferencial desprazada. Ademais $\mathcal{V}=1$ na figura superior, e $\mathcal{V}<1$ na inferior

-O desprazamento é no senso oposto ó da fonte primaria ou principal, ou en termos ópticos, o centro do padrón **desprazase** cara o buratiño con **máis fase** acumulada.

-Estes resultados de desprazamento interferencial son a base do estudo do problema da **coherencia espacial**, é dicir, para analiza-la interferencia cando temos unha **fonte extensa**, constituída por un conxunto continuo e acotado de fontes puntuais primarias desprazadas e **independentes**.



2.5.3. IY CON ILUMINACIÓN PLANA

Se agora consideramos unha **onda plana** cuxa expresión paraxial é $\mathcal{E} = E_0 e^{i\epsilon_s} e^{ik_0(\alpha x+z)}$ (pode tamén considerarse como procedente dunha fonte puntual desprazada pero sita moi lonxe do IY), entón as dúas ondas que interfieren son

$$\mathcal{E}_{(1)} = \left\{ \frac{E_0 e^{i\epsilon_s}}{i\lambda_0} e^{ik_0\alpha(\pm\frac{d}{2})} \right\} \frac{e^{ik_0 D}}{D} e^{ik_0 \frac{[(x \mp \frac{d}{2})^2 + y^2]}{2D}} \mathbf{u}_y \quad (82)$$

logo

$$I = \frac{E_0^2}{\lambda_0^2 D^2} \{2 + (e^{-ik_0 \frac{xd}{D}} e^{ik_0 \alpha d} + c.c.)\} = \frac{2 E_0^2}{\lambda_0^2 D^2} \{1 + \cos(k_0 \frac{xd}{D} - k_0 \alpha d)\} \quad (83)$$

Nótese que o máximo central desprazouse cara arriba, é dicir, ao punto $x=\alpha D$ se $\alpha>0$. Obsérvese que o **desprazamento** é cara o **buratiño que acumula máis fase**, p.ex., neste caso o buratiño de arriba ten máis fase $e^{ik_0 \alpha d/2}$ có de abaixo $e^{-ik_0 \alpha d/2}$. Isto é un resultado xeral.

Exer.- 16 (*) Deducir a intensidade interferencial, de xeito totalmente **ondulatorio**, producida por un IY con fendas paralelas ao eixo Y que pasan polos puntos $(\pm d/2, 0, 0)$, e iluminado cunha onda cilíndrica con factor de amplitude A_0 procedente dunha fonte lineal paralela ao eixo Y e que pasa polo punto $(u, 0, -L)$.

Exer.- 17 (*) Unha cámara semiesférica de vidro de 25 mm de radio, definida pola superficie $z=0$ e a superficie $x^2+y^2+z^2=R^2$ para $z>0$, está chea de ar eponse nun dos buratiños dun interferómetro tipo Young (IY adaptado, usando, p.ex., unha lente). Despois, quítase o ar e énchese dun gas. Ao compara-los dous sistemas de franxas producidos polo ar e polo gas, atópase que no último caso o sistema **desprazouse** 21 franxas brillantes. No experimento usouse unha onda plana de amplitude E_0 da liña vermella C de Fraunhofer ($\lambda_0=656.2816$ nm, é dicir, a H_α de Balmer, “estática”, de $n=3$ a $n=2$), para a cal o índice do ar é $n_a=1.000276$. Tomando para o vidro $t \approx 1$, achar os campos ópticos e a intensidade interferencial nun plano D , e o valor do índice n_g do gas. Asemade, xustificar o senso de desprazamento sofrido polo sistema de franxas.

Sol.- A cámara semiesférica pódese considerar coma un dioptrio paraxial: n_g) n_a , de radio de curvatura $-R$, sito no plano $z=R$ e iluminado por unha onda esférica procedente dun buratiño sito en $z=z_1=0$. Daquela, aplicamos c.d.c. para achar a onda paraxial emerxente da discontinuidade (sita, p.ex., no buratiño inferior). Daquela en $z=R$

$$\left\{ e^{ik_o(n_g-n_a)\frac{[(x+\frac{d}{2})^2+y^2]}{2(-R)}} \right\} \frac{E_o e^{ik_o n_g(z=R)}}{i\lambda_o(z=R)} e^{ik_o n_g \frac{[(x+\frac{d}{2})^2+y^2]}{2(z=R)}} = \frac{A_{o2}}{-z_2} e^{ik_o n_a \frac{[(x-x_2)^2+y^2]}{-2z_2}}$$

Polo tanto $z_2=-R$, $x_2=-d/2$ e $A_{o2} = E_o e^{ik_o n_g R} / i\lambda_o$. Daquela as expresións da onda procedente do buratiño 1 con cámara (n_g) (o vidro introduce unha fase $e^{2ik_o n_v d_v}$ non relevante) e da onda procedente do 2 sen cámara (n_a) son

$$\mathcal{E}_{(1)}(x, z) = \frac{E_o}{\lambda_o(z+R)} e^{ik_o(n_g)R} e^{ik_o n_a \frac{[(x+d/2)^2+y^2]}{2(z+R)}} e^{ik_o n_a z}$$

A intensidade interferencial a unha distancia D (dos buratiños), logo en $z=D-R$ respecto ao plano $z=R$, é

$$I(x, D) = 2(E_o^2/\lambda_o^2 D^2) \{1 + \cos[k_o n_a \frac{xd}{D} + k_o(n_g - n_a)R]\}$$

obtemos un desprazamento do padrón $-(n_g-n_a)RD/n_a d$ (cara o buratiño 1). Coma o padrón desprazouse 21 franxas, $(n_g-n_a)R=21\lambda_o$, e substituíndo valores $n_g=1.000827$.

Exer.- 18 (*) Sexa un IY iluminado por dúas fontes puntuais **mutuamente coerentes** de amplitude unidade e frecuencia ω , situadas ó longo do eixo x en u_o e $-u_o$, a unha distancia L dos buratiños, separados ó longo do eixo x e con transmisións t_b . 18. Achar a intensidade interferencial producida polo IY nun plano de observación $z=D$. 18.2.-*Idem*, pero coas fontes situadas en $u=0, u_o$.

Sol.-18.1.-As ondas procedentes dos puntos fonte no plano dos buratiños teñen a seguinte expresión

$$\mathcal{E}_{\mp}(x) = \frac{e^{ik_o L}}{L} e^{ik_o \frac{(x \mp u_o)^2 + y^2}{2L}}$$

onde os signos \mp corresponden a $\mp u_o$. Polo tanto os campos nos buratiños toman os valores

$$E_{o1} = \mathcal{E}_+(-d/2) + \mathcal{E}_-(-d/2) = (e^{ik_o L}/L) \left\{ e^{ik_o \frac{(-d/2+u_o)^2}{2L}} + e^{ik_o \frac{(-d/2-u_o)^2}{2L}} \right\}$$

$$E_{o2} = \mathcal{E}_+(d/2) + \mathcal{E}_-(d/2) = (e^{ik_o L}/L) \left\{ e^{ik_o \frac{(d/2+u_o)^2}{2L}} + e^{ik_o \frac{(d/2-u_o)^2}{2L}} \right\}$$

que son dúas constantes complexas. Ademais, é inmediato ver que **toman o mesmo valor** $E_o e^{i\epsilon} = E_{o1} = E_{o2}$, polo tanto $A_{o1} = A_{o2} = t_b E_o e^{i\epsilon} / i\lambda_o$, logo a intensidade interferencial é

$$I(x, z) = \frac{2E_o^2 t_b^2}{\lambda_o^2 D^2} \left\{ 1 + \cos\left(\frac{k_o x d}{D}\right) \right\}$$

con $E_o^2 = (2/L^2)[1 + \cos(k_o d u_o/L)]$. Nótese que hai casos (segundo L, d, u_o) tal que $E_o=0$, logo desaparece a interferencia porque non hai luz nos buratiños, i.e., $I(x, z)=0$.

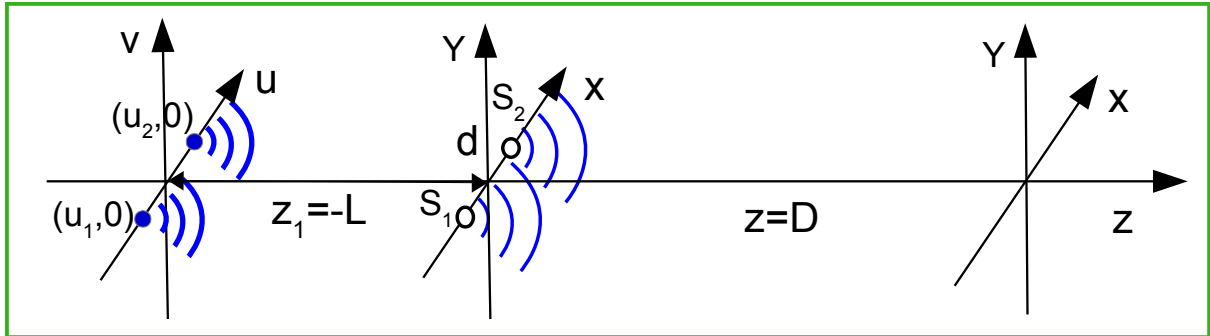
Sol.-18.2.-Neste caso teremos unha $\mathcal{V} < 1$ debido aos distintos valores de intensidade en cada buratiño, e mesmo un pequeno desprazamento.



3. Funcións de Coherencia Espacial e Temporal

3.1. INTERFERENCIA CON FONTES INCOHERENTES

■ **Dúas fontes puntuais.** Sexan dúas fontes puntuais mutuamente **incoherentes** (espacialmente) de frecuencia ω e factores de amplitude A_{u_i} , con $i = 1, 2$, sitas nos puntos $(u, v) = \{(u_1, 0), (u_2, 0)\}$ do plano $z = -L$, e polarizados, p.ex., linealmente en y .



Se ditos puntos iluminan un IY cos seus buratiños en $z=0$ nos puntos $(d/2, 0)$ e $(-d/2, 0)$ con transmisións t_b , entón o campo óptico total nun plano $z=D$ é

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{u_1} e^{i\gamma_{a1}} + \mathcal{E}_{u_2} e^{i\gamma_{a2}} = (\mathcal{E}_{1u_1} + \mathcal{E}_{2u_1}) e^{i\gamma_{a1}} + (\mathcal{E}_{1u_2} + \mathcal{E}_{2u_2}) e^{i\gamma_{a2}} \quad (84)$$

con $\mathcal{E}_{u_1} = \mathcal{E}_{u_1} \mathbf{u}_y = (\mathcal{E}_{1u_1} + \mathcal{E}_{2u_1}) \mathbf{u}_y$, *idem* para u_2 , e onde γ_{ai} son as fases aleatorias que formalizan a incoherencia mutua das fontes puntuais, logo a intensidade total é

$$I = \langle |\mathcal{E}_{u_1} e^{i\gamma_{a1}} + \mathcal{E}_{u_2} e^{i\gamma_{a2}}|^2 \rangle = |\mathcal{E}_{u_1}|^2 + |\mathcal{E}_{u_2}|^2 + 2\mathcal{R}e \langle \mathcal{E}_{u_1} \mathcal{E}_{u_2}^* e^{i\gamma_a} \rangle = I_{u_1} + I_{u_2} \quad (85)$$

con $\gamma_a = (\gamma_{a1} - \gamma_{a2})$. Logo a intensidade total é a suma das intensidades interferenciais producidas por cada punto luminoso. A intensidade de cada punto fonte emerxente dos dous buratiños vén dada por $I_{oi} = A_{u_i}^2 t_b^2 / \lambda_o^2 L^2 D^2$ logo a intensidade total é

$$I = 2I_{o1} \left[1 + \cos \left(\frac{k_o x d}{D} + \frac{k_o u_1 d}{L} \right) \right] + 2I_{o2} \left[1 + \cos \left(\frac{k_o x d}{D} + \frac{k_o u_2 d}{L} \right) \right] \quad (86)$$

Exer.-Escribir en forma normal a expresión interferencial dada pola Ec. (86) para o caso $u_1 = u_o$ e $u_2 = -u_o$ (usar a técnica XYH).

■ **Fonte extensa de luz.** Se agora temos N puntos mutuamente incoherentes debemos facer un sumatorio $\sum_1^N I_{u_i}$, e se temos un continuo temos unha **fonte extensa** (emisión incoherente, independente, dos puntos da fonte) e temos que achar unha integral. En efecto, sexa unha fonte cunha densidade de intensidade $i_L(u, v) \approx A_o^2(u, v) / L^2$ (i.e., en $z=L$), e para fixar ideas, sexa unha **fonte lineal incoherente** $i_L(u)$ (problema 1D) centrada na orixe e sita paralela ó eixo x (eixo u) a unha distancia L do plano dos buratiños. Entón a intensidade no plano $z=D$ obterase baixo a seguinte integral en u , onde por simplicidade tomamos $t_{b1} = t_{b2} = t_b = 1$,

$$I(x) = \int 2i(u) \left[1 + \cos(k_o dx / D + k_o du / L) \right] du, \quad i(u) = \frac{i_L(u)}{\lambda_o^2 D^2} = \frac{A_o^2(u)}{\lambda_o^2 L^2 D^2} \quad (87)$$



3.2. INTRODUCCIÓN Á INTERFEROMETRÍA ESTELAR

Cuns exemplos básicos imos facer unha pequena introdución a interferometría estelar, introducindo de seguido o interferómetro estelar de Michelson.

Exer.- 19 Achar a intensidade interferencial para dous puntos luminosos sitios en $u_1 = u_o$ e $u_2 = -u_o$ equienergéticos, i.e., con igual intensidade $i_o = A_o^2/L^2$ (no plano dos buratiños). Discutir qué sucede co grao de coherencia, en función dos parámetros físicos da fonte ($2u_o, \lambda_o, L$) e o interferómetro (d). **Obs.**-Fisicamente, isto pode corresponder, p.ex., a unha estrela dobre detectada mediante un telescopio interferométrico (IY) con espellos móbiles, chamado interferómetro estelar de Michelson.

Sol.-Do resultado teórico anterior para este caso particular obtemos directamente a expresión da I interferencial na **forma normal** (tómase por defecto $t_{b_j}=1$),

$$I = 2 \frac{A_o^2}{\lambda_o^2 L^2 D^2} \left[1 + \cos \left(\frac{k_o x d}{D} + \frac{k_o u_o d}{L} \right) \right] + 2 \frac{A_o^2}{\lambda_o^2 L^2 D^2} \left[1 + \cos \left(\frac{k_o x d}{D} - \frac{k_o u_o d}{L} \right) \right] =$$

$$= 4 \frac{A_o^2}{\lambda_o^2 L^2 D^2} + 4 \frac{A_o^2}{\lambda_o^2 L^2 D^2} \cos \left(\frac{k_o x d}{D} \right) \cos \left(\frac{k_o u_o d}{L} \right) = 4 I_o \left[1 + \cos \left(\frac{k_o u_o d}{L} \right) \cos \left(\frac{k_o x d}{D} \right) \right]$$

-O **grao de coherencia** (visibilidade) vén dado por $\mathcal{V} = |\cos(k_o u_o d/L)|$. Nótese que hai valores dos parámetros (u_o, d, L, λ_o) para os cales non hai interferencia, é dicir, $\mathcal{V}=0$ se $k_o u_o d/L = (m + 1/2)\pi$. Asemade, temos $\mathcal{V}=1$ se $k_o u_o d/L = m\pi$. A perda de \mathcal{V} é debido ás fluctuacións das fontes (incoherencia mutua), que se traduce en padróns desprazados.

■ **Aplicación á astronomía óptica.** Os resultados do **Exer.-19** permiten, p.ex., medir a distancia $2u_o$ entre as estrelas dunha **estrela dobre**. Se detectamos a luz cun IY e variamos a d entre os buratiños (en realidade un **interferómetro estelar de Michelson** que recolle a luz con espellos), entón $\exists d_o / \mathcal{V}=0$ a determinar experimentalmente. Así, partindo de $d \approx 0$ obtemos $\mathcal{V}=0$ se

$$k_o u_o d_o / L = \pi/2 \Rightarrow 2u_o = \pi L / k_o d_o$$

Entón, se coñecemos L por paralaxe, e k_o o fixamos usando un filtro cromático (filtro de lonxitude de onda), podemos determinar a distancia $2u_o$.

■ **Interferómetro Estelar de Michelson (IEM).** Este interferómetro é esencialmente un IY pero a selección dos “puntos” (pequenas seccións de varios cm) da fronte de onda é feita con espellos separados unha distancia δ . De seguido, a luz deses “puntos” (con fases relevantes $e^{\mp i k_o \delta u_o / 2L}$) é redireccionada, vía imaxe, aos buratiños dun IY separados d . Daquela, a intensidade, p.ex. no caso dunha estrela dobre, será

$$I(x, y, D) = 4 I_o \left[1 + \cos \left(\frac{k_o u_o \delta}{L} \right) \cos \left(\frac{k_o x d}{D} \right) \right] \quad (88)$$

Con esta configuración ademais de obter máis enerxía, a interfranja permanece constante con δ (máis resolución óptica) e só cambia a visibilidade do padrón interferencial. **Obs.**-O IEM orixinal só usaba a lente principal do telescopio, e a observación faise no plano focal, é dicir, no infinito.

Exer.- 20 Achar a intensidade interferencial producida por un IY con $t_b=1$ para dous puntos luminosos sitios nos puntos arbitrarios (u_1, u_2). **Sol.**-A solución é bastante inmediatea se facemos uso do punto medio $u_c = (u_1 + u_2)/2$, e da distancia $\Delta u = u_2 - u_1$.



Exer.- 21 (*) Achar a intensidade interferencial nun IY con $t_b=1$ para dous puntos luminosos sitios en $\pm u_o$ pero intensidades distintas $i_{L1} = i_o = A_o^2/L^2$, $i_{L2} = \tilde{\epsilon}i_o$, onde $\tilde{\epsilon} \in [0, 1]$.

Sol.-A distribución de intensidade pode representarse tamén coa seguinte función singular

$$i_L(u) = i_o \delta(u - u_o) + \tilde{\epsilon} i_o \delta(u + u_o) \quad (89)$$

Usando $i(u) = i_L(u)/\lambda_o^2 D^2$ na Ec. (87), ou alternativamente a Ec. (86), i.e., sumando as intensidades interferenciais con pesos $I_o (\equiv I_{o1})$ e $\tilde{\epsilon} I_o (\equiv I_{o2})$ obtemos, usando ademais a notación $I_o = A_o^2/\lambda_o^2 L^2 D^2$,

$$\begin{aligned} I &= 2I_o \left[1 + \cos \left(\frac{k_o x d}{D} + \frac{k_o u_o d}{L} \right) \right] + 2\tilde{\epsilon} I_o \left[1 + \cos \left(\frac{k_o x d}{D} - \frac{k_o u_o d}{L} \right) \right] = \\ &= \{2I_o(1 + \tilde{\epsilon})\} + \{2I_o(1 + \tilde{\epsilon}) \cos(\beta u_o)\} \cos \Phi - \{2I_o(1 - \tilde{\epsilon}) \sin(\beta u_o)\} \sin \Phi \end{aligned} \quad (90)$$

onde $\beta = k_o d/L$, $\Phi = k_o d x D$. Agora usamos a técnica $\chi\Upsilon\Upsilon$. Se $X \equiv C = 2I_o(1 + \tilde{\epsilon}) \cos(\beta u_o)$, $Y \equiv S = 2I_o(1 - \tilde{\epsilon}) \sin(\beta u_o)$, $Q = 2I_o(1 + \tilde{\epsilon})$, e as relacións abstractas $\cos \alpha = X/H \equiv C/H$ e $\sin \alpha = Y/H \equiv S/H$ (ver Exer. 15), con $H = \sqrt{C^2 + S^2}$, obtemos

$$I = Q \left\{ 1 + \frac{H}{Q} \cos(\Phi + \alpha) \right\} \quad (91)$$

onde

$$\mathcal{V}(Q, C, S) = \frac{H}{Q} = \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{Q} = \frac{[(1 + \tilde{\epsilon}^2) + 2\tilde{\epsilon} \cos(2k_o d u_o/L)]^{1/2}}{1 + \tilde{\epsilon}}$$

Se variamos a distancia entre buratiños até $d_m = L\pi/2k_o u_o$ obtemos un mínimo de visibilidade interferencial

$$\mathcal{V}_{min} = \frac{[(1 + \tilde{\epsilon}^2) - 2\tilde{\epsilon}]^{1/2}}{1 + \tilde{\epsilon}} = \frac{1 - \tilde{\epsilon}}{1 + \tilde{\epsilon}} \quad (92)$$

Daquela **do mínimo** de visibilidade obtemos unha estimación para $2u_o$, é dicir, a distancia entre estrelas. Nótese que se $\tilde{\epsilon} = 1$ entón $\mathcal{V}_{min} = 0$. Obsérvase o comportamento **periódico** da coherencia, é dicir, se d é tal que $2k_o d u_o/L = 2m\pi$, onde $m \in \mathbb{N}$, recuperamos unha coherencia espacial máxima. Se $\tilde{\epsilon} = 1$, $\mathcal{V} = |\cos(k_o d u_o/L)|$.

3.3. FONTE EXTENSA E FUNCIÓN DE COHERENCIA [C]

Imos reescribir a $I(x)$ para fonte extensa dada pola Ec. (87) **en forma normal**. Para iso utilizamos

$$\begin{aligned} \Phi &= k_o d x/D = \omega\tau, \quad \beta(u) = k_o d u/L, \quad Q = 2 \int_{-u_o}^{u_o} i(u) du, \\ C &= 2 \int_{-u_o}^{u_o} i(u) \cos B(u) du \quad (\text{TFC}), \quad S = 2 \int_{-u_o}^{u_o} i(u) \sin B(u) du \quad (\text{TFS}) \end{aligned} \quad (93)$$

logo usando a a técnica do Exer. 15 de cos e sen abstractos X/H e Y/H obtemos

$$\boxed{I(x) = Q + C \cos \Phi - S \sin \Phi = Q \left[1 + \mathcal{V}(Q, C, S) \cos(\Phi + \alpha) \right]} \quad (94)$$

$$\cos \alpha = C/\sqrt{C^2 + S^2}, \quad \sin \alpha = S/\sqrt{C^2 + S^2}, \quad \mathcal{V}(Q, C, S) = \sqrt{C^2 + S^2}/Q$$

En xeral $\mathcal{V} < 1$, sendo a súa orixe a incoherencia mutua dos puntos da fonte extensa, e representa o **grao de coherencia espacial**. O resultado equivale a **dous campos** procedentes dos buratiños con igoal $I_o = Q/2$, e **parcialmente coherentes**. Nótese que se $i(u)$ é par, entón $S=0$ e $\alpha=0$. É doado probar que $g_{(1)}(d, \tau) = F(\beta) \exp\{-i\omega\tau\}$, $\tau = \omega x d/cD$.

3.4. INTERFERENCIA CON FONTE LINEAL (1D) INCOHERENTE

3.4.1. DERIVACIÓN DA INTENSIDADE INTERFERENCIAL

Sexa unha fonte lineal incoherente de dimensión $2u_o$, é dicir, unha liña ó longo do eixo u (paralelo ó eixo dos buratiños) indicado na Figura da [pax. 34](#), e cunha distribución uniforme de intensidade,

$$i_L(u) = \begin{cases} 0 & -\infty < u < -u_o \\ i_o = A_o^2/L^2 & -u_o < u < u_o \\ 0 & u_o < u < \infty \end{cases} \quad (95)$$

Tendo en conta a Ec. (87), onde $i(u) = i_L(u)t_b^2/\lambda_o^2 D^2 = i_o t_b^2/\lambda_o^2 D^2$, e usando $\beta = k_o d/L$, obtemos

$$I(x) = \int 2i(u) \left[1 + \cos(k_o \frac{dx}{D} + k_o \frac{du}{L}) \right] du = Q + C \cos k_o \frac{dx}{D} - S \operatorname{sen} k_o \frac{dx}{D} \quad (96)$$

con

$$Q = \int_{-u_o}^{u_o} 2i(u) du = 2 \left(\frac{2u_o i_o t_b^2}{\lambda_o^2 D^2} \right) = 2I_o; \quad S = \int 2i(u) \operatorname{sen}(\beta u) du = 0 \quad (97)$$

$$C = \int 2i(u) \cos(\beta u) du = 2 \int_{-u_o}^{u_o} \frac{i_o t_b^2}{\lambda_o^2 D^2} \cos(\beta u) du = 2 \left(\frac{2u_o i_o t_b^2}{\lambda_o^2 D^2} \right) \frac{\operatorname{sen}(\beta u_o)}{\beta u_o} \quad (98)$$

logo

$$I(x) = Q \left[1 + \frac{C}{Q} \cos k_o \frac{dx}{D} \right] = 2I_o \left[1 + \operatorname{senc}(\beta u_o) \cos(k_o \frac{xd}{D}) \right] \quad (99)$$

Daquela, a Visibilidade ou grao de coherencia \mathcal{V} espacial vén dada pola expresión unidimensional

$$\mathcal{V} = |g_{(1)}| = |\operatorname{senc}(\beta u_o)| = |\operatorname{senc}\left(\frac{k_o d}{L} u_o\right)| \quad (100)$$

O valor $\mathcal{V} < 1$ é o resultado do **desprazamento** mutuo dos **padróns** interferenciais producidos polos puntos mutuamente incoherentes da fonte.

-Análise da \mathcal{V} da fonte lineal. O valor obtido de $\mathcal{V} = |\operatorname{senc}(k_o d u_o / L)|$ depende da posición L e do tamaño $2u_o$ da fonte. Obsérvase que no lim $L \rightarrow \infty$ obtemos $\mathcal{V} = 1$ e no lim $L \rightarrow 0$ obtemos $\mathcal{V} = 0$, como é de agardar. É doado tamén xustificar que se $i_L(v)$ (só dependente de v) entón $\mathcal{V} = 1$ (xa que I non depende de v).

-Aplicación a astronomía óptica. Usando a ecuación (45), que dá a definición de \mathcal{V}_{exp} (medindo I_{max}, I_{min}), e o valor teórico $\mathcal{V} = |\operatorname{senc}(k_o d u_o / L)|$, pódense obter as **dimensións** lineais (ou angulares) da fonte, p.ex., estimar **diámetros estelares**.

En efecto, coma se fixo para a medida de estrelas dobles, tratado no Exer. 19, se variamos d obtemos d_o tal que $\mathcal{V} = 0$, i.e., neste caso $k_o d_o u_o / L = \pi$, logo $u_o = 0.5 \lambda_o L / d_o$ (semilonxitude). En realidade no caso máis físico 2D o raio que se obtén é: $u_o \approx 0.6 \lambda_o L / d_o$.

3.4.2. ANCHURA DE COHERENCIA ESPACIAL

A caracterización da coherencia espacial (ou transversal) dunha perturbación depende do **criterio escollido**, i.e., do **valor de \mathcal{V}_c** (grao de coherencia) a partir do cal a fonte considérase espacialmente coherente.

-Sexa $\mathcal{V} = |\text{senc}(k_0 du_o/L)| = \mathcal{V}_c$, é dicir, escollemos un valor concreto de \mathcal{V} ao que lle corresponde un argumento concreto $k_0 du_o/L = \theta_c \rightarrow k_0 d 2u_o/L = 2\theta_c$.

-Se $\Delta\alpha_o = 2u_o/L$ entón $k_0 \Delta\alpha_o d = \Delta k_x d \approx 2\theta_c$ (analogía co caso temporal se $\theta_c = \pi$).

-A efectos prácticos o que interesa é determinar o valor d para un θ_c particular, é dicir, a **anchura (diámetro) $d = d_c$** de coherencia espacial ou transversal. Despeando d obtemos

$$d_c = 2\theta_c / \Delta k_x = \theta_c L \lambda_o / 2\pi u_o \quad (101)$$

Exems.-Se $\mathcal{V}_c = 0$ entón obtemos $\theta_c = \pi$; se $\mathcal{V}_c = 2/\pi \approx 0.636$, entón $\theta_c = \pi/2$; etc. Logo $\mathcal{V} > \mathcal{V}_c \Leftrightarrow d < d_c$.

-**En resumo: se $d < d_c$** , nese dominio a perturbación é coherente segundo o criterio escollido. **Se L (ou λ_o) aumenta**, ou u_o diminúe, a anchura de coherencia d_c aumenta, é dicir, a perturbación en $z = 0$ ten máis dominio de coherencia (máis coherente) espacial.

3.5. INTRODUCCIÓN AO TEOREMA DE VAN CITTERT-ZERNIKE (VC-Z)

Imos aproveitar os resultados para fonte extensa lineal co obxecto de introducir dun xeito máis físico o importantísimo Teorema de VC-Z e a súa aplicación á imaxe astronómica.

■ **Teorema de VC-Z (Real).**-Sexa a función $F(d) = C/Q$ da **amplitude cosenoidal** da Ec. (99), entón usando a intensidade normalizada $i_n(u) = i_L(u) / [(\lambda_o D)^2 Q] = i(u)/Q$, temos

$$F(d) = \frac{C(d)}{Q} = \int i_n(u) \cos\left(\frac{k_0 du}{L}\right) du \rightarrow F(\beta = \frac{k_0 d}{L}) = \int i_n(u) \cos(\beta u) du \quad (102)$$

e como $F(\beta) \cos \omega\tau = \mathcal{R}e[g_{(1)}(d, \tau)]$, entón $F(\beta)e^{-i\omega\tau} + cc = g_{(1)}(d, \tau) + cc$, e daquela a función de coherencia é $g_{(1)}(d, \tau) = F(\beta)e^{-i\omega\tau}$, con **$|F(\beta)|$ a Visibilidade**.

-A Ec. (102) é esencialmente o importante **Teorema de VC-Z** (para unha función $i_n(u)$ par), é dicir: a amplitude $F(\beta)$ da función de coherencia é a **TFC directa** da intensidade (normalizada) da fonte $i(u)$.

■ **Aplicación a imaxe astronómica.**-**Xa que a función $i(u)$ é par**, entón podemos extraela mediante a TFC inversa,

$$i_n(u) \propto \int F(\beta) \cos(\beta u) d\beta \quad (103)$$

Daquela mídese $|F| = \mathcal{V}$ (coas intensidades máx. e mín.) variando o valor de d e daquela de $\beta = k_0 d/L$. Ademais, o **desprazamento de franxas** dá información da fase da *f.d.c.*, p.ex., se no centro hai un cambio de máximo a mínimo, entón hai un salto de fase π , cambio de signo da función.

Unha vez determinada $F(\beta)$ faise a **integral numérica (103)** e obtense, salvo constantes, a distribución de intensidade do obxecto luminoso $i(u)$, e daquela a **imaxe do obxecto**. Esta é unha técnica de **imaxe interferométrica** moi usual en astronomía óptica.

Obs.-En xeral o **obxecto luminoso** non será unha función par de intensidade, e requirirase un procesado integral máis complexo (ver Complementos), pero esencialmente consiste en conectar de forma integral (TF complexa) a función de coherencia e/ou o grao de coherencia (a Visibilidade) e a intensidade da fonte.



3.6. FUNCIONES DE COHERENCIA (s) E TEOREMAS DE VC-Z 1D E 2D [C]

■ **Función de Coherencia (s).** Da Ec. (70), e as definicións de intensidade $I_1 = \langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_1^* \rangle$ e $I_2 = \langle \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2^* \rangle$, obtemos

$$I(\mathbf{r}, t) \approx I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \frac{[\langle \mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* \rangle]}{\sqrt{I_1 I_2}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \frac{[g_{(1)} + g_{(1)}^*]}{2} \quad (104)$$

de onde deducimos que o termo interferencial contén a parte real da función de coherencia normalizada. Se ademais $I_1 = I_2 = I_o$ entón obtemos

$$I(\mathbf{r}, t) = 2I_o \{1 + \Re e(g_{(1)})\} \quad (105)$$

Comparando esta ecuación coa intensidade interferencial (94) para fonte estensa, e escollendo $\Delta_o = 0$ (o retardo $\tau = \Delta/c$ non é relevante dado que é un problema de coherencia espacial, é dicir, a coherencia temporal suponse alta), obtemos a **función de coherencia espacial** de primeira orde

$$g_{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 = t_2) = |g_{(1)}| e^{-i\alpha(d)} = \left(\sqrt{C^2 + S^2}/Q \right) e^{-iatn\left\{\frac{S(d)}{C(d)}\right\}} \quad (106)$$

-Nótese que a visibilidade é o módulo da función de coherencia. Asemade temos que C e S dependen de B , i.e., de d onde $d = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, onde \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 son puntos do plano $z = 0$. Daquela, a función de coherencia impleméntase variando d .

-No caso **limite**, $i_L(u) = \delta(u)i_o = \delta(u)A_o^2/L^2$ obtemos os valores $Q = 2A_o^2 t_b^2 / \lambda_o^2 t_b^2 L^2 D^2$, $S = 0$ e $C = 2A_o^2 t_b^2 / \lambda_o^2 L^2 D^2$, logo $\mathcal{V} = 1$ e $g_{(1)} = 1$, é dicir, máxima coherencia.

-**En consecuencia**, unha fonte estensa c-m produce ondas parcialmente coherentes dende o punto de vista espacial, é dicir, haberá unha **distanza transversal** d "máxima" (determinada por \mathcal{V}) entre dous puntos da fronte de onda, procedente de dita fonte estensa, ate onde se atopen correlacionados (segundo un criterio dado). Obviamente, se $d \rightarrow 0$ entón $\mathcal{V} \rightarrow 1$ xa que $B \rightarrow 0$, i.e., $C \rightarrow Q$ e $S \rightarrow 0$.

■ **Teorema de Van Cittert-Zernike (VC-Z) 1D.** Observemos que a función de coherencia normalizada dada pola Ec. (106) pódese reescribir como

$$g_{(1)}(d) = |g_{(1)}| e^{-i\alpha(d)} = \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{Q} e^{-i\alpha(d)} = \frac{(C - iS)}{Q} \quad (107)$$

e usando as definicións das integrais C e S e a relación $\tan \alpha = S/C$, obtemos o importante resultado de que a función de coherencia é a **transformada de Fourier espacial** (complexa) da intensidade normalizada da fonte. En efecto,

$$g_{(1)}(d) = \frac{\left\{ \int 2i(u) \cos(k_o \frac{du}{L}) du - i \int 2i(u) \sen(k_o \frac{du}{L}) du \right\}}{\int 2i(u) du}$$

logo

$$g_{(1)}(d) = \int i_n(u) e^{-ik_o \frac{du}{L}} du, \quad i_n(u) = \frac{i(u)}{Q} \quad (108)$$

onde i_n é a intensidade normalizada da fonte. Isto é a versión unidimensional do importantísimo **teorema de Van Cittert-Zernike**. Daquela, coñecida $g_{(1)}$ podemos achar $i_n(u)$ (**imaxe**) coa transformada de Fourier inversa. Este resultado é o fundamento da **imaxe interferencial en astronomía óptica**.



■ **Coherencia espacial 2D.** Imos xeralizar a **fontes extensas bidimensionais (2D)** o resultado de coherencia espacial para fontes unidimensionais 1D obtido anteriormente. Consideremos un interferómetro de Young con dous buratiños sitos nos puntos (d_{1x}, d_{1y}) e (d_{2x}, d_{2y}) do plano $z = 0$, iluminados por unha fonte extensa de área S . A expresión da intensidade interferencial producida por unha fonte puntual sita no punto (u, v) do plano $z = -L$ con $L \gg \text{Max}\{S\}$ e de intensidade $i_L(u, v)$, vén dada por

$$dI(x, y) = 2 \frac{i_L(u, v) t_b^2}{\lambda_o^2 D^2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{k_o d_x x}{D} + \frac{k_o d_y y}{D} + \frac{k_o d_x u}{L} + \frac{k_o d_y v}{L} \right] \right\} dudv \quad (109)$$

onde $d_x = d_{2x} - d_{1x}$ e $d_y = d_{2y} - d_{1y}$, e daquela $d = (d_x^2 + d_y^2)^{1/2}$. No límite $d_y = 0$ recuperamos o resultado 1D. Procedendo de igual xeito ca no caso unidimensional obtemos a seguinte expresión da intensidade interferencial

$$I(x, y) = Q \left[1 + \mathcal{V} \cos(k_o x d_x / D + k_o d_y y / D + \alpha) \right] \quad (110)$$

onde agora temos as seguintes relacións para Q e \mathcal{V} xeralizadas ao caso bidimensional

$$\mathcal{V}(d_x, d_y) = \frac{\sqrt{C^2 + S^2}}{Q}, \quad Q = 2 \int i(u, v) dudv \quad (111)$$

$$(C, S) = 2 \int i(u, v) (\cos, \text{sen})(k_o d_x u / L + k_o d_y v / L) dudv \quad (112)$$

Unha vez máis obsérvase que dada unha fonte 1D, é dicir, $i(u, v) = i(u)\delta(v)$ recuperamos as expresións unidimensionais anteriores. Ademais, para medir a función de coherencia (grao de coherencia) temos que medir a \mathcal{V} e o desprazamento de franxas (fase) para todas as distancias d_x, d_y .

■ **Teorema de Van Cittert-Zernike 2D.** Procedendo dun xeito similar ao seguido no caso unidimensional é doado probar que $g_{(1)}$ pódese expresar como unha **Transformada de Fourier complexa (\mathcal{F}) da intensidade** da fonte extensa,

$$g_{(1)}(d_x, d_y) = \int i_n(u, v) e^{-ik_o d_x u / L} e^{-ik_o d_y v / L} dudv = \mathcal{F}\{i_n(u, v)\} \quad (113)$$

-En realidade este é o chamado Teorema de **Van Cittert-Zernike de campo lonxano**, é dicir, cando a distancia L da fonte ó plano dos buratiños é moito maior có tamaño da fonte extensa.

-Noutro caso, é dicir cando as dimensións da fonte non sexan pequenas respecto á distancia L , obteríase o chamado Teorema de Van Cittert-Zernike de **campo cercano**. Unha formalización máis rigorosa de todo isto require o uso da teoría da difracción da luz.

-Estes teoremas, entre outras aplicacións, son o fundamento da interferometría de moi longa base terrestre (VLBI) para obter **imaxes de fontes cósmicas** moi lonxanas.

-É importante subliñar que o cálculo interferencial con fonte extensa xeral debe facerse sempre formalmente coa expresión xeral 2D dadas polas ecuacións (110), (111) e (112), e despois particularizar. P.ex., para unha dirección determinada dos buratiños (p.e. a dirección x usada até o de agora), ou para un caso de fonte extensa 1D, etc. Deste xeito os resultados son compatibles cos obtidos pola teoría rigorosa de Van Cittert-Zernike.

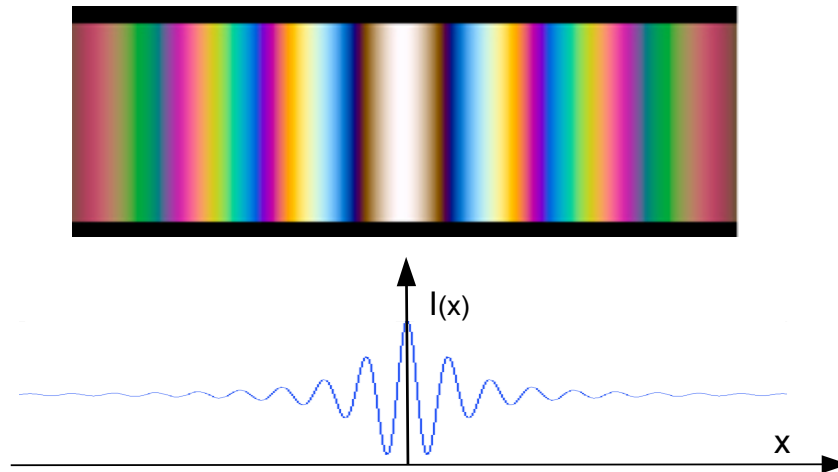


3.7. COHERENCIA TEMPORAL NO ESPAZO ESPECTRAL [C]

3.7.1. INTERFERENCIA POLICROMÁTICA CO IY

O IY con dúas fendas iluminado cunha fonte espacialmente coherente (p.ex. un punto luminoso) pero policromática, é dicir, unha intensidade dependente da frecuencia ω , $I_o(\omega)$, produce a intensidade interferencial

$$I(x) = \int I(\omega) d\omega = \int 2I_o(\omega) \left[1 + \cos\left(\omega \frac{xd}{cD}\right)\right] d\omega \quad (114)$$



-Nótese o **máximo central branco**, é dicir, todas as frecuencias teñen un máximo no centro $x=0$ logo aparenta cor branco, e despois case todas teñen os primeiros mínimos moi pretos (marrón-negro). No resto temos **cores que indican cal deles é o dominante** (cales teñen intensidade máxima). Isto non é exactamente así, xa que pode haber máximos de distintas cores coma o azul e o vermello (cor maxenta), etc. Finalmente, lonxe do centro haberá brancos chamados de orde superior.

3.7.2. ESPECTROMETRÍA DE TFC CO IY

Nótese que hai unha relación integral de Transformada Fourier Coseno (TFC) entre a **intensidade no espazo real $I(x)$** e a **intensidade no espazo de frecuencias $I_o(\omega)$** . Isto ten unha aplicación importante en **espectrometría**. En efecto, sexan os seguintes cambios de variable

$$\tau = xd/cD, \quad Q = \int 2I_o(\omega) d\omega$$

entón $I(x) \rightarrow I(\tau)$, e usando unha intensidade “desprazada” $\mathcal{I}(\tau) = \{I(\tau) - Q\} / 4\pi$ obtemos a expresión

$$\mathcal{I}(\tau) = \frac{I(\tau) - Q}{4\pi} = \frac{1}{2\pi} \int I_o(\omega) \cos \omega\tau d\omega \rightarrow I_o(\omega) = \int \mathcal{I}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (115)$$

Nótese que $I_o(\omega) = A_o^2(\omega) / (LD\lambda_o)^2 = A_o^2(\omega) / (LD\omega/2\pi c)^2$. Ademais, en boa aproximación $I_o(\omega) \approx A_o^2(\omega) / (LD\omega_c/2\pi c)^2$, onde $A_o^2(\omega) / L^2$ é a intensidade da fonte, salvo constantes, no pano $z=L$.

3.7.3. GRAO DE COHERENCIA TEMPORAL DO IY

Presentaremos algúns aspectos fundamentais de coherencia temporal no espazo espectral con dous Exercicios.

Exer.- 22 [C] Achar a función de visibilidade $\tilde{\mathcal{V}}$ do padrón de intensidade producido por un IY, iluminado por unha fonte puntual, dicromática $\{\lambda_o, \lambda_o + \Delta\lambda\}$, con $\Delta\lambda \ll \lambda_o$, equienergética con $i_o = A_o^2/L^2$, en $z=0$, e sita no eixo z do IY.

Sol.- Temos dous números de onda, $k_{o1} = 2\pi/(\lambda_o + \Delta\lambda)$ e $k_{o2} = 2\pi/\lambda_o$ (ou frecuencias), con $k_{o1} < k_{o2}$, que podemos reescribir como

$$k_{o1} = k_c - \Delta k/2, \quad k_{o2} = k_c + \Delta k/2, \quad \text{logo } \omega_{o1} = \omega_c - \Delta\omega/2, \quad \omega_{o2} = \omega_c + \Delta\omega/2$$

onde $k_c = (k_{o1} + k_{o2})/2$, $\Delta k = (k_{o2} - k_{o1})$, e $\omega_c = (\omega_{o1} + \omega_{o2})/2$, $\Delta\omega = (\omega_{o2} - \omega_{o1})$. Nótese que nos poñemos no centro do espectro. Chamando $I_o = i_o/D^2$, a intensidade interferencial vén dada por

$$\begin{aligned} I(x) &= I_{k_{o1}}(x) + I_{k_{o2}}(x) = 2I_o \left\{ 1 + \cos\left(k_{o1} \frac{xd}{D}\right) \right\} + 2I_o \left\{ 1 + \cos\left(k_{o2} \frac{xd}{D}\right) \right\} = \\ &= 4I_o \left\{ 1 + \cos\left(\frac{\Delta k}{2} \frac{xd}{D}\right) \cos\left(k_c \frac{xd}{D}\right) \right\} = 4I_o \left\{ 1 + \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2c} \frac{xd}{D}\right) \cos\left(\frac{\omega_c}{c} \frac{xd}{D}\right) \right\} \end{aligned}$$

Obsérvase que a visibilidade depende do punto x . Asemade, ten unha variación periódica, logo rexións con máxima visibilidade e outras con mínima (desaparición de interferencia). En particular, a interferencia desaparece, é dicir, $\mathcal{V} = 0$, ao redor dos puntos $x_N = (N + 1/2)\pi(2cD)/(\Delta\omega d)$, e ten visibilidade máxima $\mathcal{V} = 1$ ao redor dos puntos $x_N = N\pi(2cD)/(\Delta\omega d)$.

–“Anchura” espectral. Se medísemos a distancia l entre dous máximos (ou mínimos) de visibilidade entón $l = \pi(2cD)/(\Delta\omega d)$, e daquela obtemos $\Delta\omega = \pi(2cD)/(ld)$.

Exer.- 23 [C] Achar $I(x)$ e \mathcal{V} para fonte puntual policromática equienergética de intensidade espectral $i_L(k_o) = A_o^2/L^2$ (en $z=0$), con anchura espectral: Δk , e centrada en k_c con $\Delta k \ll k_c$. Ademais achar o grao de coherencia.

Sol.- É un caso análogo á fonte lineal espacial incoherente. Abonda con sumar (integrar) en k_o , no intervalo indicado, a todas as intensidades interferencias (é un caso particular da Ec. (114), xa que $k_o = \omega/c$). Definindo $k_{o1} = k_c - \Delta k/2$, $k_{o2} = k_c + \Delta k/2$, e $k_d = k_o - k_c$, e tendo en conta que en boa aproximación $k_o \approx k_c$ xa que $\Delta k \ll k_c = 2\pi/\lambda_c$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{k_{o1}}^{k_{o2}} \frac{2i_L}{\lambda_c^2 D^2} [1 + \cos(k_o dx/D)] dk_o = \int_{\Delta k/2}^{\Delta k/2} \frac{2i_L}{\lambda_c^2 D^2} \{1 + \cos[(k_d + k_c)xd/D]\} dk_d = \\ &= \frac{2i_L}{\lambda_c^2 D^2} \Delta k + \frac{2i_L}{\lambda_c^2 D^2} \frac{\text{sen}[\Delta k/2 + k_c]xd/D - \text{sen}[-\Delta k/2 + k_c]xd/D}{xd/D} = \\ &= \frac{2i_L}{\lambda_c^2 D^2} \Delta k \left\{ 1 + \frac{2 \text{sen}[(\Delta k/2)xd/D]}{\Delta k(xd/D)} \cos\left(k_c \frac{xd}{D}\right) \right\} = 2I_o \left\{ 1 + \left| \text{senc}\left(\frac{\Delta k}{2} \Delta\right) \right| \cos(k_c \Delta + \tilde{\alpha}) \right\} \end{aligned}$$

onde $\Delta = xd/D$, $2I_o = 2A_o^2 \Delta k / L^2 \lambda_c^2 D^2 \equiv \tilde{Q}$, e $\tilde{\alpha} = \{0, \pi\}$ segundo o signo que tome a función $\text{senc}(\Delta k \Delta/2)$.



A Visibilidade determina o grao de coherencia, polo tanto o *g.d.c.* temporal para esta fonte é

$$\tilde{V} = \left| \text{senc} \left(\frac{\Delta k}{2} \Delta \right) \right|$$

Nótese que hai visibilidade (interferencia) significativa se $\Delta k \Delta = (\Delta \omega / c) \Delta = \Delta \omega \tau < 2\pi$, logo tendo en conta que os pulsos asociados á fonte verifican $\Delta \omega t_o \sim 2\pi$, entón **deixa de haber interferencia** se $\Delta \omega \tau > 2\pi$, logo $\tau > t_o$, como era de agardar, segundo o visto no dominio temporal, é dicir, usando pulsos, e agora intensidades espectrais.

■ **Coherencia espazo-temporal.** Se temos unha fonte policromática e extensa obteríamos o grao de coherencia espazo-temporal. No caso unidimensional espacial temos

$$I(x) = 2 \int \int i(k_o, u) [1 + \cos(k_o dx / D + k_o du / L)] dk_o du \quad (116)$$

3.8. FUNCIÓN DE COHERENCIA (t) E TEOREMA DE V-K [C]

■ **Interferencia policromática xeral.** Sexa unha fonte principal puntual (evitamos así problemas de coherencia espacial) e **policromática** entón temos un padrón interferencial para cada frecuencia, xerando así un **padrón** interfeferencial **multicor**, como foi adiantado na pax. 41.

-O padrón presentaría un máximo central branco seguido de mínimos laterais caseque negros (xa que o primeiro mínimo de cada λ_o visible atópanse moi pretos). De seguido teríamos unha sucesión de cores, e finalmente branco de “**orde superior**”, debido a gran mestura dos padróns lonxe da orixe.

-Sexa a función de intensidade espectral $i(k_o)$, logo a intensidade interferencial luminosa producida pola fonte policromática é

$$I(x) = \int 2i(k_o) [1 + \cos(k_o dx / D)] dk_o, \quad i(k_o) \approx i_L(k_o) / \lambda_c^2 D^2 \quad (117)$$

Se como é usual, o espectro atópase centrado nunha frecuencia ω_c , i.e., $k_c = \omega_c / c$, e é relativamente **estreito**. Facendo o **cambio** de variable $k_d = k_o - k_c$ obtemos

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2i(k_d) \{1 + \cos[(k_d + k_c)\Delta]\} dk_d \quad (118)$$

onde $\Delta = xd / D = c\tau$. Sexa $\Phi = k_c \Delta$ e $\tilde{B} = k_d \Delta$, logo coma no caso espacial temos as integrais

$$\tilde{Q} = 2 \int i(k_d) dk_d, \quad \tilde{C} = 2 \int i(k_d) \cos \tilde{B} dk_d, \quad \tilde{S} = 2 \int i(k_d) \text{sen } \tilde{B} dk_d \quad (119)$$

Nótese que obtemos expresións análogas ao caso espacial, polo que podemos usar o mesmo procedemento para obter a forma normal da intensidade interferencia.

-Forma normal da intensidade. De seguido procedemos de igual xeito ca no caso espacial para obter a intensidade interferencial, e obtemos

$$I(x) = \tilde{Q} + \tilde{C} \cos \Phi - \tilde{S} \sin \Phi = \tilde{Q} [1 + \tilde{\mathcal{V}}(\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{S}) \cos(\Phi + \tilde{\alpha})] \quad (120)$$

con $\tilde{\mathcal{V}}(\tilde{Q}, \tilde{C}, \tilde{S}) = \sqrt{\tilde{C}^2 + \tilde{S}^2} / \tilde{Q}$, e $\cos \tilde{\alpha} = \tilde{C} / \sqrt{\tilde{C}^2 + \tilde{S}^2}$ e $\sin \tilde{\alpha} = \tilde{S} / \sqrt{\tilde{C}^2 + \tilde{S}^2}$.

Neste caso o contraste $\tilde{\mathcal{V}}$ ten a súa orixe na incoherencia mutua das frecuencias da fonte policromática, logo representa o chamado *grao de coherencia temporal*.

■ **Teorema de de Wiener-Khintchine.** Tendo en conta que $\Delta = \tau/c$, entón a *función de coherencia temporal* (de primeira orden) é

$$g_{(1)}(\tau) = \tilde{\mathcal{V}}(\tau) e^{-i(\omega_c \tau + \tilde{\alpha})} = \frac{\sqrt{\tilde{C}^2 + \tilde{S}^2}}{\tilde{Q}} e^{-i(\omega_c \tau + \tilde{\alpha})} = \frac{(\tilde{C} - i\tilde{S})}{\tilde{Q}} \quad (121)$$

Se agora usamos as definicións das integrais \tilde{C} e \tilde{S} e a expresión da intensidade normalizada $i_n(k_d) = i(k_d) / \tilde{Q}$ obtemos

$$g_{(1)}(\tau) = \int i_n(k_d) e^{ik_d c \tau} dk_d \quad (122)$$

que non é máis que o Teorema de Van Cittert-Zernike para o dominio temporal, *i.e.*, o importante *Teorema de Wiener-Khintchine*.

-Ligazóns material didáctico:

1.-Esta ligazón permite simular distintas interferencias variando distintos parámetros dun Interferómetro de Young (separación entre fendas, lonxitude de onda, etc).

https://javalab.org/en/category/light_wave_en/interference_en/